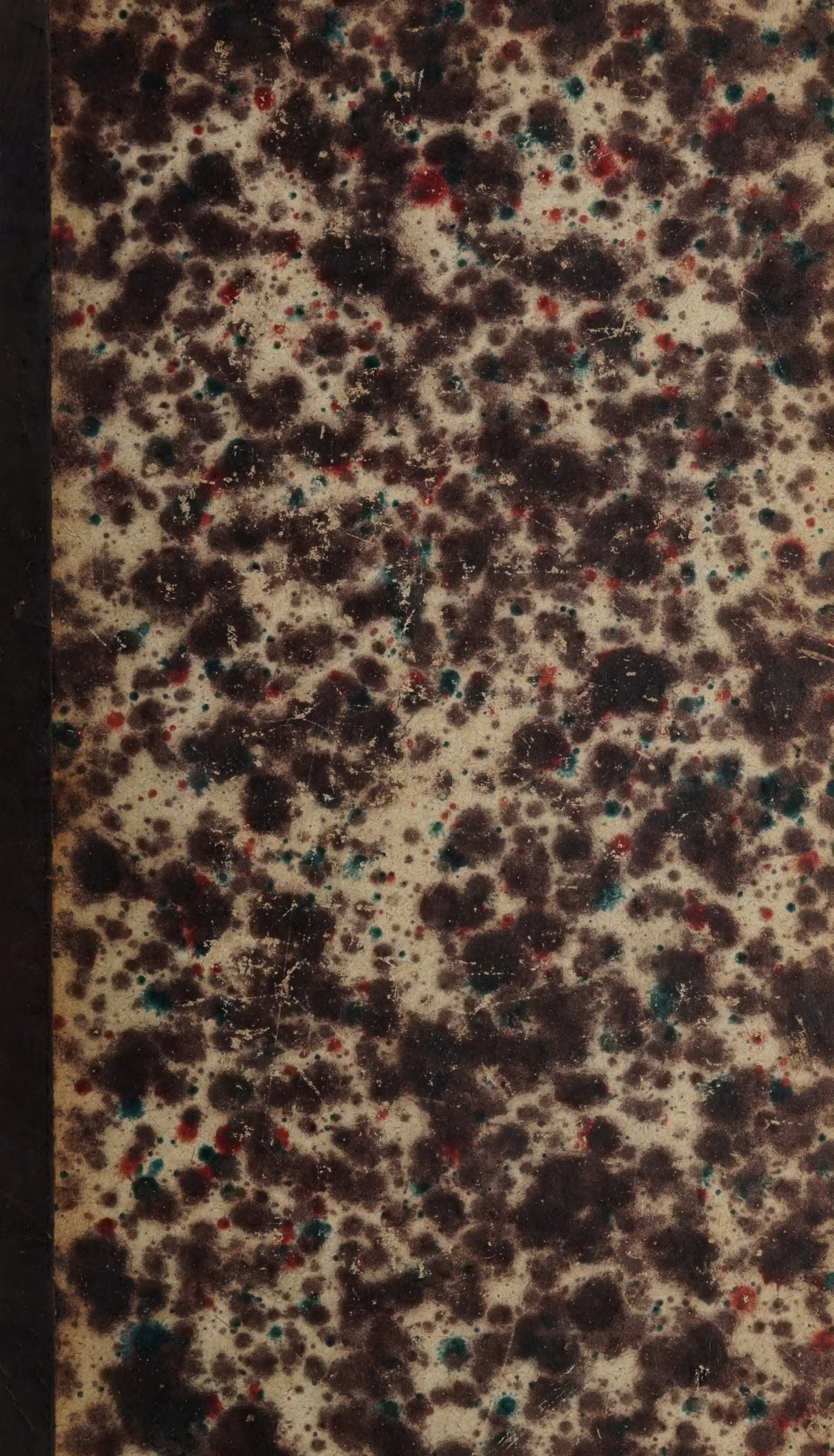
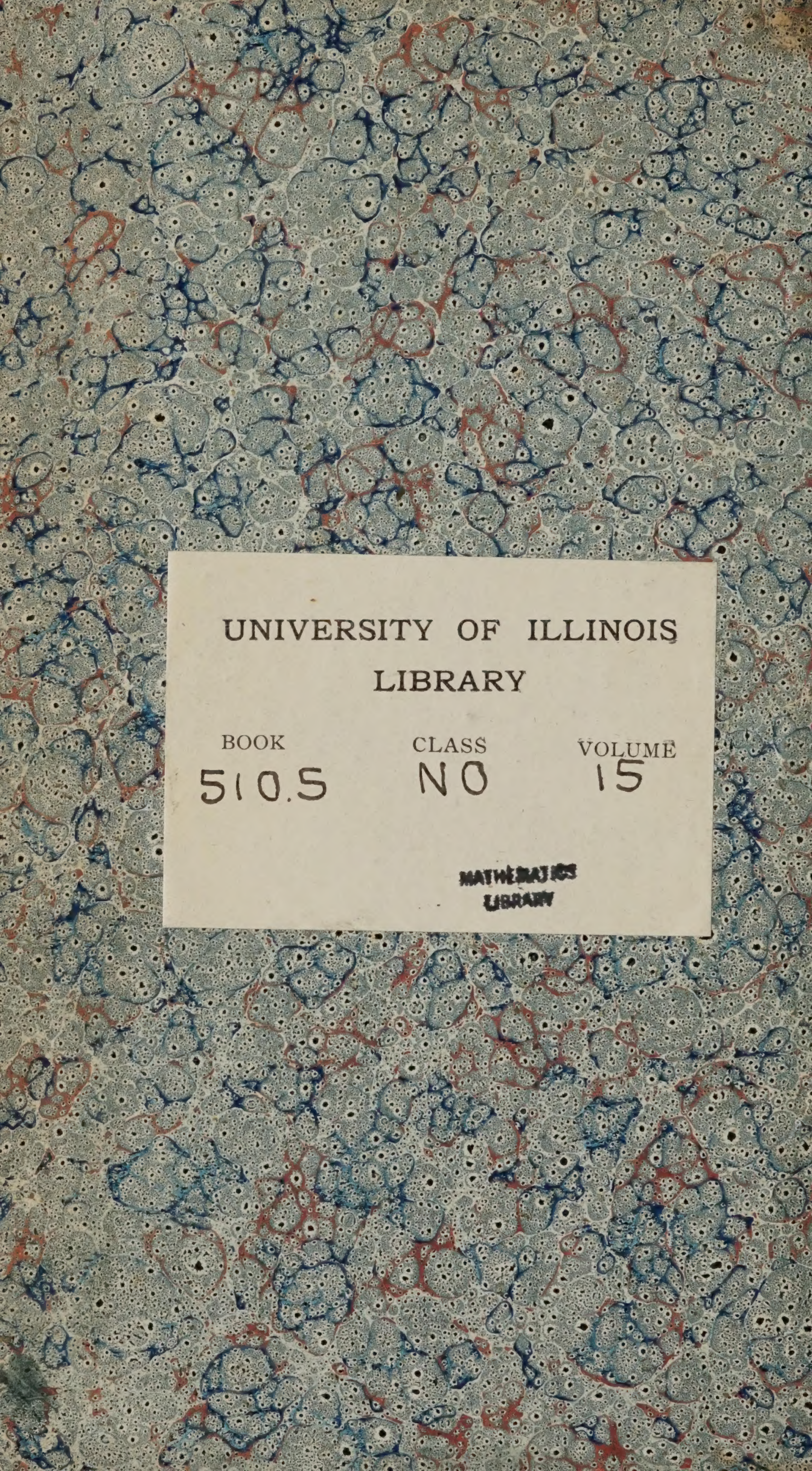




UNIVERSITY OF ILLINOIS
LIBRARY
BOOK
510.5
CLASS
NO
VOLUME
15
MATHEMATICS
LIBRARY



NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

1856.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE;

RÉDIGÉ

Par M. Terquem,
Officier de l'Université, Docteur ès Sciences, Professeur aux Écoles Impériales d'Artillerie,
Officier de la Légion d'honneur,

ET

M. Gerono,
Professeur de Mathématiques.

TOME QUINZIÈME
AUGMENTÉ D'UN
BULLETIN DE BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE
ET DE
BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

PARIS,
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.,
Quai des Augustins, n° 55.

1856

Digitized by the Internet Archive
in 2021 with funding from
University of Illinois Urbana-Champaign

https://archive.org/details/nouvellesannales1518unse

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

On entend souvent parler des comètes et de la détermination provisoire de leurs orbites paraboliques au moyen de trois observations. Je crois être agréable à nos lecteurs en leur offrant pour étrennes un calcul de comète d'après la méthode d'Olbers perfectionnée par Gauss. Nous sommes entrés dans une ère de calculs, soit : je crois qu'il vaut mieux que la jeunesse s'occupe de calculs concernant les affaires du ciel que de ceux qui se rapportent aux affaires de la Bourse. Ce n'est pas là l'opinion du monde ; mais je pense avec Rollin qu'il faut enseigner dans les colléges principalement ce qu'on n'apprend pas dans le monde et quelquefois même l'opposé de ce qu'on y apprend.

OBSERVATIONS DE LA SECONDE COMÈTE DE L'ANNÉE 1813,

Faites dans l'Observatoire de Gottingue,

Avec quelques annotations relatives au calcul des orbites paraboliques ;

PAR CHARLES-FRÉDÉRIC GAUSS.

Lu à la Société royale des Sciences, le 10 septembre 1813.

A partir du 7 avril, j'ai commencé à observer moi-même, à notre observatoire, la comète découverte le

71382

3 avril de cette année, par mon très-cher collègue M. Harding, dans la constellation du Taureau de Poniatowski. Voici les déterminations qu'il a été possible d'obtenir au moyen d'un microscope circulaire adapté à un télescope de 10 pieds :

1813.	T. M. DE GOTTING.	ASC. DR. APPAR.	DÉCLIN. APPAR.
	h m s	° ′ ″	° ′ ″
Avril 7	13.12. 2	271. 7.19,3	5.34.36,7 bor.
9	13.35.40	270.10.33,5	4.11. 3,4
11	13.17.43	269. 1.19,9	2.33. 0,7
14	13. 7.36	266.44. 5,5	0.33. 0,8 aust.
21	13.23.00	256.39.19,3	12.57.56,0

Ensuite Harding a fait au quart de cercle mural les observations suivantes :

1813.	T. M. DE GOTTING.	ASC. DR. APPAR.	DÉCLIN. APPAR.
	h m s	° ′ ″	° ′ ″
Avril 21	15. 7.21	256.34.19,6	13. 2.26,5 aust.
24	14.22.50	248.23.21	21.45. 2
25	14. 4.21	244.44.42	25.10.42

Le 24 et le 25, la comète était extrêmement remarquable à l'œil nu ; les nuits suivantes, un ciel couvert de nuages et le mouvement rapide de descente australe de la comète mirent fin aux observations.

Il me paraît superflu de consigner ici les éléments paraboliques que j'ai déduits tout de suite des trois premières observations, car j'ai confié le soin de calculer ces éléments avec beaucoup plus d'exactitude à un calculateur très-exercé, au docteur Gerling. C'est à lui que nous de-

vons les éléments corrigés suivants, adaptés autant que possible à toutes nos observations et à celles que nous a transmises Olbers.

Logarithme de la distance périhélie....	0,0849212
Temps du passage au périhélie au méridien de Gottingue, mai 1813........	19,44507
Long. du périhélie.................	197° 43′ 7″,7
Long. du nœud ascendant...........	42.40.15,2
Inclinaison de l'orbite...............	81. 2.11,8

Mouvement *rétrograde.*

Observations d'Olbers.

1813.	T. M. DE BREM.	ASC. DR. APPAR.	DÉCLIN. APPAR.
	h m s	° ′ ″	° ′ ″
Avril 14	13.31. 4	266.42.51,2	0.34. 2,8 aust.
15	12.14.29	265.48.47,9	1.46. 4,5
19	11.38.00	260.40.39,1	8.15.23,7
21	12.00.35	256.51.59,3	12.42.54,3
24	11.58.38	248.43.57,7	21.25. 9,8
25	11.41.30	245. 8.18,0	24.49. 2,4
	12. 5.38	245. 4. 3,0	24.54.16,4

Observation de Bouvard à l'Observatoire de Paris.

1813.	T. M. DE PARIS.	ASC. DR. APPAR.	DÉCLIN. APPAR.
	h m s	° ′ ″	° ′ ″
Avril 13	16.22. 2	267.27.18	0.24.46 bor

Le tableau snivant contient les différences entre les observations et celles qui résultent des éléments rappor-

tés ci-dessus :

	DIFFÉRENCES.		OBSERVATEURS.
	Ascension droite.	Déclinaison.	
Avril 7	+ 3",8	+ 8",5	Gauss.
9	+ 2,0	+ 34,3	Gauss.
11	— 5,3	— 17,7	Gauss.
13	— 1,6	— 0,4	Bouvard.
14	— 7,4	— 28,6	Gauss.
.	+ 2,7	— 8,4	Olbers.
15	— 0,9	+ 28,7	Olbers.
19	— 25,1	+103,9	Olbers.
21	— 56,6	— 59,2	Olbers.
.	— 30,1	— 5,2	Gauss.
.	— 22,8	— 24,1	Harding.
24	— 45,2	— 41,4	Olbers.
.	+ 0,4	— 11,6	Harding.
25	— 23,3	— 67,8	Olbers.
.	— 9,4	— 27,4	Olbers.
.	+ 9,7	+ 1,4	Harding.

On a tenu compte de l'aberration et de la parallaxe.

On me permettra d'ajouter ici quelques abréviations de calcul dont j'ai fait souvent usage dans la première détermination de l'orbite parabolique selon la méthode d'Olbers, abréviations qui rendent cette méthode, déjà si expéditive, encore plus courte et mieux propre aux applications numériques. Ces abréviations sont relatives au calcul des rayons vecteurs et principalement au calcul de la corde qui joint le premier au dernier lieu observé. Olbers fait usage d'expressions de cette forme $\sqrt{f+g\rho+h\rho^2}$ et détermine les coefficients f, g, h par des opérations assez simples, mais qui exigent, pour obtenir une précision suffisante, les grandes Tables de logarithmes avec sept

ou du moins avec six figures décimales. J'ai remplacé ces expressions par d'autres qui paraissent être quelque peu plus commodes pour le calcul, et présentent aussi cet avantage de ce que les petites Tables de logarithmes avec cinq décimales peuvent suffire à toutes les opérations. Le point essentiel porte sur les considérations suivantes. Soient :

$\odot$, $\odot'$, $\odot''$, les longitudes du Soleil dans la première, deuxième et troisième observation ;

R, R′, R″, distances du Soleil à la Terre ;

α, α', α'', longitudes géocentriques de la comète ;

6, $6'$, $6''$, latitudes géocentriques de la comète ;

r, r', r'', distances de la comète au Soleil ;

ρ, ρ', ρ'', distances raccourcies de la comète à la Terre ;

t, t', t'', temps des observations ;

k, corde qui réunit le *premier* lieu au *troisième* lieu de la courbe ;

$M = \frac{\rho''}{\rho}$.

Cela posé, on voit facilement que l'on a

$$(1)\quad r = \sqrt{(\rho \cos \alpha - R \cos \odot)^2 + (\rho \sin \alpha - R \sin \odot)^2 + \rho^2 \operatorname{tang}^2 6},$$

$$(2)\quad r'' = \sqrt{\left[\begin{array}{r}(M\rho \cos \alpha'' - R'' \cos \odot'')^2 + (M\rho \sin \alpha'' - R'' \sin \odot'')^2 \\ + M^2 \rho^2 \operatorname{tang}^2 6'',\end{array}\right]}$$

$$(3)\quad k = \sqrt{\left[\begin{array}{l}(M\rho \cos \alpha'' - \rho \cos \alpha - R'' \cos \odot'' + R \cos \odot)^2 \\ + (M\rho \sin \alpha'' - \rho \sin \alpha - R'' \sin \odot'' + R \sin \odot)^2 \\ + (M\rho \operatorname{tang} 6'' - \rho \operatorname{tang} B)^2\end{array}\right]};$$

les équations (1) et (2) développées prennent cette forme,

$$r = \sqrt{\frac{\rho^2}{\cos^2 6} - 2\rho R \cos (\alpha - \odot) + R^2},$$

$$r'' = \sqrt{\frac{M^2 \rho^2}{\cos^2 6''} - 2 M \rho R'' \cos (\alpha'' - \odot'') + R''^2}.$$

En posant donc

$$\cos\beta \cos(\alpha - \odot) = \cos\psi,$$
$$R \sin\psi = B,$$
$$\cos\beta'' \cos(\alpha'' - \odot'') = \cos\psi'',$$
$$R'' \sin\psi'' = B'',$$

nous aurons

$$r = \sqrt{\left(\frac{\rho}{\cos\beta} - R\cos\psi\right)^2 + B^2}.$$

$$r'' = \sqrt{\left(\frac{M\rho}{\cos\beta''} - R''\cos\psi''\right)^2 + B''^2}.$$

Introduisons cinq quantités auxiliaires g, G, h, H, ζ déterminées par ces équations,

$$R''\cos\odot'' - R\cos\odot = g\cos G,$$
$$R''\sin\odot'' - R\sin\odot = g\sin G,$$
$$M\cos\alpha'' - \cos\alpha = h\cos\zeta\cos H,$$
$$M\sin\alpha'' - \sin\alpha = a\cos\zeta\sin H,$$
$$M\,\text{tang}\,\beta'' - \text{tang}\,\beta = h\sin\zeta.$$

La formule (3) se change en celle-ci :

$$k = \sqrt{\left[\begin{array}{r}(\rho h\cos\zeta\cos H - g\cos G)^2 + (\rho h\cos\zeta\sin H - g\sin G)^2 \\ + \rho^2 h^2 \sin^2\rho\end{array}\right]}$$
$$= \sqrt{\rho^2 h^2 - 2\rho h g\cos\zeta\cos(G - H) + g^2}.$$

Ainsi, si nous posons

$$\cos\zeta\cos(G - H) = \cos\varphi, \quad g\sin\varphi = A,$$

on aura

$$k = \sqrt{(\rho h - g\cos\varphi)^2 + A^2}.$$

Si, de plus, nous posons $\varphi h - g\cos\varphi = u$,

$$k = \sqrt{u^2 + A^2}.$$

Nous croyons qu'il sera agréable à un grand nombre de lecteurs si nous indiquons non-seulement la liaison bien ordonnée de toutes les opérations relatives à ces transformations, mais encore si nous y ajoutons les opérations finales de manière que l'on trouve ici réuni tout ce qui est exigé pour le *premier* calcul des orbites paraboliques. Nous éclaircirons en même temps les règles par des applications numériques prises dans les observations sur notre comète. Nous choisissons celles des 7, 14 et 21 avril. La réduction de ces observations fournit les *données* suivantes :

$$t = 7{,}55002, \qquad \odot = 17^\circ.47'.41'',$$
$$t' = 14{,}54694, \qquad \odot' = 24.38.45,$$
$$t'' = 21{,}59931, \qquad \odot'' = 31.31.35,$$
$$\alpha = 271^\circ.16'.38'', \qquad \log R = 0{,}00091,$$
$$\alpha' = 266.27.22, \qquad \log R' = 0{,}00175,$$
$$\alpha'' = 256.48.\ 8, \qquad \log R'' = 0{,}00260.$$
$$6 = +29^\circ.\ 2'.\ 0'',$$
$$6' = +22.52.18,$$
$$6'' = +\ 9.53.12,$$

I. La *première* opération consiste dans la détermination de la valeur approché de M, au moyen de cette formule,

$$M = \frac{t'' - t'}{t' - t}\ \frac{\tang 6' \sin(\alpha - \odot) - \tang 6 \sin(\alpha' - \odot')}{\tang 6'' \sin(\alpha' - \odot') - \tang 6' \sin(\alpha'' - \odot'')}.$$

Dans notre exemple, on trouve

$$\log M = 9{,}75799.$$

II. Il faut déterminer maintenant les quantités g, G, h, H, ζ par les formules suivantes, qui sont équivalentes à celles qui ont été données ci-dessus, mais qui sont plus

commodes pour le calcul :

$$R'' \cos(\odot'' - \odot) - R = g \cos(G - \odot),$$
$$R'' \sin(\odot'' - \odot) = g \sin(G - \odot),$$
$$M - \cos(\alpha'' - \alpha) = h \cos\zeta \cos(H - \alpha''),$$
$$\sin(\alpha'' - \alpha) = h \cos\zeta \sin(H - \alpha''),$$
$$M \operatorname{tang} 6'' - \operatorname{tang} 6 = h \sin\zeta.$$

On a

$$G = 113^\circ\, 43'\, 57'',$$
$$\log g = 9{,}38029,$$
$$H = 109^\circ.\ 5'.49'',$$
$$\zeta = 44.\ 13.\ 9,$$
$$\log h = 9{,}81477.$$

III. Ensuite nous poserons

$$\cos\zeta \cos(G - H) = \cos\varphi,$$
$$\cos 6 \cos(\alpha - \odot) = \cos\psi,$$
$$\cos 6'' \cos(\alpha'' - \odot'') = \cos\psi'',$$
$$g \sin\varphi = A,$$
$$R \sin\psi = B,$$
$$R'' \sin\psi'' = B''.$$

Si, par hasard, les cosinus des angles φ, ψ, ψ'' diffèrent peu de l'unité, il faudra se servir de Tables à six ou même à sept figures décimales.

D'ailleurs, il n'est pas nécessaire d'évaluer ces angles en degrés, minutes et secondes; il suffit de passer tout de suite des logarithmes des cosinus aux logarithmes des sinus.

Dans notre exemple, on trouve

$$\log A = 9{,}22527,$$
$$\log B = 9{,}98706,$$
$$\log B'' = 9{,}86038.$$

IV. Enfin, on pose

$$h \cos 6 = b,$$
$$\frac{h \cos 6'}{M} = b'',$$
$$g \cos \varphi - b \ R \ \cos \psi = c,$$
$$g \cos \varphi - b'' R'' \cos \psi'' = c''.$$

Dans notre exemple, on a

$$\log b = 9,75645,$$
$$\log b'' = 0,05028,$$
$$c = + 0,31365,$$
$$c'' = + 0,95443.$$

V. Tout étant ainsi préparé, les rayons vecteurs r, r'' et la corde k dépendent de l'inconnue u par ces relations,

$$r = \sqrt{\left(\frac{u + c}{b}\right)^2 + B^2},$$
$$r'' = \sqrt{\left(\frac{u + c''}{b''}\right)^2 + B''^2},$$
$$k = \sqrt{u^2 + A^2}.$$

On détermine cette inconnue u par des *essais*, de manière qu'elle satisfasse à l'équation

$$(r + r'' + k)^{\frac{3}{2}} - (r + r'' - k)^{\frac{3}{2}} = \frac{t'' - t}{m} \ (*),$$

où m désigne un nombre de jours 9,6887401, et

$$\log m = 0,9862673.$$

Il faut donner le signe + à la quantité $(r + r'' - k)^{\frac{3}{2}}$, si le mouvement héliocentrique de la comète dans l'in-

(*) Célèbre théorème d'Euler sur les propriétés dynamiques des cordes de la parabole, généralisé par Lambert pour toutes les coniques. Nous donnerons une démonstration du théorème général. Tm.

tervalle $t'' - t$ surpasse l'angle 180 degrés; mais ce cas ne peut jamais arriver dans les suppositions sur lesquelles est fondée la première détermination de l'orbite. Il est presque inutile d'avertir que pour calculer r on introduit un angle auxiliaire θ, tel que

$$\frac{b\,\mathrm{B}}{u+c} = \tang \theta,$$

d'où

$$r = \frac{\mathrm{B}}{\cos\theta};$$

et de même pour r'' et k : et chacun voit facilement combien il est extrêmement commode de pouvoir faire usage dans ces calculs de notre Table pour trouver immédiatement les logarithmes des sommes et des différences.

Dans notre exemple, on a

$$\log \frac{t''-t}{m} = 0,16139,$$

et, après un petit nombre d'essais, on trouve

$$u = 0,24388.$$

VI. La quantité u étant connue, nous aurons

$$\rho = \frac{u + g\cos\varphi}{h}, \quad \rho'' = \mathrm{M}\rho,$$

$$\log\rho = 9,80364, \quad \log\rho'' = 9,56163.$$

Les opérations restantes sont assez connues; mais, pour que tout s'y trouve, il nous paraît convenable de consigner encore les formules restantes dont nous avons coutume de nous servir.

Soient donc :

λ, λ'', les longitudes héliocentriques de la comète dans la première et la troisième observation;

β, β'', les latitudes héliocentriques;

r, r'', les longitudes dans l'orbite;

Ω, longitude du nœud ascendant;

i, l'inclinaison de l'orbite à prendre entre 0 et 90 degrés si, selon le mode ordinaire, nous distinguons le mouvement direct et rétrograde;

ω, longitude du périhélie;

T, temps du passage au périhélie;

q, distance dans le périhélie.

VII. On trouve les positions héliocentriques par les formules

$$\rho \cos(\alpha - \odot) - R = r \cos\beta \cos(\lambda - \odot),$$
$$\rho \sin(\alpha - \odot) = r \cos\beta \sin(\lambda - \odot),$$
$$\rho \operatorname{tang}\beta = r \sin\beta,$$
$$\rho'' \cos(\alpha'' - \odot'') - R'' = r'' \cos\beta'' \cos(\lambda'' - \odot''),$$
$$\rho'' \sin(\alpha'' - \odot'') = r'' \cos\beta'' \sin(\lambda'' - \odot''),$$
$$\rho'' \operatorname{tang}\beta'' = r'' \sin\beta''.$$

L'accord des valeurs des rayons vecteurs r, r'' déduites de ces formules, avec les valeurs trouvées ci-dessus, peut servir de contrôle. Le mouvement est direct ou rétrograde, selon que λ'' est supérieur ou inférieur à λ.

Dans notre exemple nous trouvons

$$\lambda = 225^\circ.4'.22'', \quad \beta = +\ 14^\circ.51'.39'', \quad \log r = 0,13896,$$
$$\lambda'' = 223.6.55, \quad \beta'' = +\ 2.49.28, \quad \log r'' = 0,11068;$$

ainsi le mouvement de la comète est rétrograde.

VII. Pour trouver la longitude du nœud et l'inclinaison, on prend les formules

$$\pm \operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang} i \sin(\lambda - \Omega),$$
$$\pm \frac{\operatorname{tang}\beta'' - \operatorname{tang}\beta \cos(\lambda'' - \lambda)}{\sin(\lambda'' - \lambda)} = \operatorname{tang} i \cos(\lambda - \Omega);$$

le signe supérieur est pour le mouvement direct et l'inférieur pour le mouvement rétrograde.

Ensuite, les longitudes dans l'orbite se déduisent des formules

$$\frac{\tang(\lambda - \Omega)}{\cos i} = \tang(v - \Omega),$$

$$\frac{\tang(\lambda'' - \Omega)}{\cos i} = \tang(v'' - \Omega),$$

$v - \Omega$, $v'' - \Omega$ doivent se prendre respectivement dans le même quadrant dans lequel se trouvent $\lambda - \Omega$ et $\lambda'' - \Omega$.

Pour notre comète, nous trouvons

$$\begin{aligned} \Omega &= 42^\circ.40'.\ 8'', \\ i &= 81.\ 1.\ 3, \\ v &= 237.43.\ 7, \\ v'' &= 225.31.32 \end{aligned}$$

IX. Les formules suivantes donnent la longitude du périhélie et la distance dans le périhélie :

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{q}} \cos \tfrac{1}{2}(v - \omega),$$

$$\frac{\cot \frac{1}{2}(v'' - v)}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sin \frac{1}{2}(v'' - v)\sqrt{r''}} = \frac{1}{\sqrt{q}} \sin \tfrac{1}{2}(v - \omega);$$

pour notre comète,

$$\omega = 197^\circ\, 37'\, 51'', \quad \log q = 0{,}08469.$$

X. Enfin, on déduit des Tables de Barker les mouvements moyens qui correspondent aux anomalies vraies $v - \omega$, $v'' - \omega$ ou $\omega - v$, $\omega - v''$.

Représentant ces mouvements moyens par M et M'', on a

$$\mathrm{T} = t \mp \mathrm{M}\, n q^{\frac{3}{2}} = t'' \mp \mathrm{M}''\, n q^{\frac{3}{2}};$$

les signes supérieurs si dans le mouvement direct $v > \omega$, $v'' > \omega$ ou dans le mouvement rétrograde $v < \omega$, $v'' < \omega$,

et les signes inférieurs dans le cas opposé. La quantité n est constante et son logarithme égale 0,0498723. L'accord des deux valeurs de T fournit un moyen de contrôle.

Dans notre exemple, nous trouvons

$$T = 49,518,$$
$$T = 49,517;$$

Ainsi on peut adopter pour le temps du passage par le périhélie : mai 19,5175.

Si, au moyen de ces éléments, on calcule le lieu géométrique pour l'observation intermédiaire (14 avril), on trouve pour longitude 266° 27′ 15″, latitude 22° 52′18 bor. Celle-ci ne diffère que de 7 secondes, l'autre s'accorde entièrement avec l'observation.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES (Fin)

(voir tome XIV, page 394).

3e *Exemple :*

$$x - \tan x = 0,$$

équation que l'on rencontre dans la théorie des oscillations des corps élastiques et dans la théorie de la chaleur.

On peut écrire

$$\frac{x \cos x - \sin x}{\cos x} = 0,$$

et démontrer comme ci-dessus que les racines de l'équation

$$\frac{1}{\cos x} = 0$$

n'appartiennent pas à l'équation ; il suffit donc de consi-

dérer seulement l'équation

$$x \cos x - \sin x = 0.$$

A chaque racine α correspond une racine $-\alpha$; on n'a donc besoin que de chercher les racines positives. La plus petite de ces racines est zéro.

$$f''(x) = -(x \cos x + \sin x),$$
$$f'(x) = -x \sin x,$$
$$f(x) = x \cos x - \sin x,$$

ω étant une très-petite quantité, on obtient

	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$,
(ω)	$-$	$-$	$-$
(90°).....	$-$	$-$	$+$

il n'y a donc pas de racines entre 0 et 180°, et non plus, évidemment, entre 90 et 180 degrés.

On a

$(180^\circ + \omega)$.....	$+$	$+$	$-$
(270°).....	$+$	$+$	$+$

Il y a donc une racine entre ces limites; en les resserrant, on trouve

$(4,4)$.....	$+$ 2,3,	$+$ 4,187,	$-$ 0,4006,
$(4,5)$.....	$+$ 1,92,	$+$ 4,398885,	$+$ 0,028949.

(Il faut se rappeler que l'arc dont la longueur est 4,4 [rayon égale 1], contient $252^\circ\, 6'\, 5''$, etc.)

$$\frac{2,3}{8,37} = 0,2, \quad k = 0, \quad n = 1,$$

limite extrême égale 4,5.

$$\frac{0,028}{4,398} = 0,00\ldots \text{ (car } 2n + k = 0\text{)}.$$

1[re] approximation :

$$4,5 - 0,01 = 4,49, \quad f(4,49) < 0,$$

ainsi la racine est entre 4,49 et 4,5.

4,5 est encore limite extrême :

$$\frac{0,028949}{4,398885} = 0,0065 \quad (4n + k = 4).$$

2[e] approximation :

$$4,5 - 0,066 = 4,4934, \quad f(4,4934) < 0,$$

ainsi la racine est entre 4,4934 et 4,4935;

$$\frac{f(4,4935)}{f'(4,4935)} = \frac{0,000396339}{4,38627} = 0,00009035 \ (8n + k = 8).$$

3[e] approximation :

$$4,4935 - 0,00009036 = 4,49340964,$$

exacte jusqu'à $\left(\frac{1}{10}\right)^8$ près; cette valeur correspond à un arc de 257° 27′ 12″,9268. Euler trouve

$$257^\circ\, 27'\, 12'' = 4,49340834;$$

Poisson trouve 4,49331, expression déjà fautive à la quatrième décimale, il faut lire probablement 4,49341 (*).

On trouve de la même manière les autres racines qui sont en nombre infini.

4[e] *Exemple :*

$$(4 - 3x^2) \sin x - 4x \cos x = 0.$$

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VIII, p. 420.

Poisson donne pour valeur de la seconde racine 7,73747; inexact dès la seconde décimale. La vraie valeur est 7,725.

Cette équation se présente dans la théorie des oscillations d'une sphère élastique.

A chaque racine positive α correspond une racine négative $-\alpha$. Il suffit de chercher les racines positives.

$$f(x) = (4 - 3x^2)\sin x - 4x\cos x,$$
$$f'(x) = -x(3x\cos x + 2\sin x),$$
$$f''(x) = (3x^2 - 2)\sin x - 8x\cos x;$$

la fonction $f''(x)$ reste toujours négative dans l'intervalle de $x = 0$ à $x = 45^\circ$.

Dans cet intervalle $f(x)$ peut être prise pour fonction déterminante; ω étant un très-petit arc, on obtient

$$\begin{array}{ll} (\omega) \ldots\ldots & - \ - \ - \\ (45^\circ) \ldots\ldots & - \ - \ - \end{array}$$

il n'y a donc pas de racines entre 0 et 45 degrés.

$f''(x)$ change de signe dans l'intervalle de 45 à 90 degrés; on ne peut donc prendre $f''(x)$ pour fonction déterminante; on pourrait diviser cet intervalle en d'autres intervalles plus petits et de manière que $f''(x)$ ne change pas de signe, mais il est plus court de prendre les dérivées supérieures.

$$f'''(x) = (3x^2 - 10 \quad \cos x + 14x\sin x,$$
$$f^{\text{IV}}(x) = (24 - 3x^2)\sin x + 20x\cos x,$$

$f^{\text{IV}}(x)$ reste constamment positive entre 0 et 90 degrés; on a les deux suites

$$\begin{array}{ll} (0) \ldots\ldots & + \ - \ - \ - \ - \\ (90^\circ) \ldots\ldots & + \ + \ + \ - \ - \end{array}$$

Il y a une variation dans chaque suite, par conséquent point de racines entre 0 et 90 degrés.

Dans l'intervalle de 90 à 180 degrés, $f''(x)$ reste posi-

tive et l'on a

$$\begin{array}{llllll} (90^\circ)\ldots\ldots & + & - & - & - & - \\ (180^\circ)\ldots\ldots & + & + & + & + & + \end{array}$$

Il existe donc une racine entre 90 et 180 degrés, c'est-à-dire entre $x = 1,5707951$ et $x = 3,1415927$. Resserrant ces limites, on trouve

$$\begin{array}{llll} & + & + & - \\ (2,5)\ldots\ldots & 26,04, & 12,029, & 0,816, \\ & + & + & + \\ (2,6)\ldots\ldots & 27,2, & 14,707, & 0,519. \end{array}$$

$$\frac{27,2}{2.12,029} = 1,\ldots, \quad k = -1, \quad n = 1;$$

ainsi la condition $n \overline{\overline{>}} 1 - k$ n'est pas remplie. Resserrant encore les limites,

$$\begin{array}{llll} & + & + & - \\ (2,56)\ldots\ldots & 26,81, & 13,901, & \\ & + & + & + \\ (2,57)\ldots\ldots & 26,92, & 13,88437, & 0,09057. \end{array}$$

$$\frac{26,92}{2.13,8} = 0,9, \quad k = 0, \quad n = 2;$$

la condition est remplie; la limite *extrême* est 2,57, le quotient

$$\frac{0,09057}{13,88437} = 0,0065, \quad (2n + k = 4).$$

1re approximation :

$$2,57 - 0,0066 = 2,5634,$$

valeur trop petite.

Dans l'opération suivante, on obtient la valeur exacte jusqu'à la huitième décimale $(4n + k = 8)$.

$$\frac{f(2,5635)}{f'(2,5635)} = \frac{0,00090157}{13,7095659} = 0,00006576.$$

Ainsi la 2e approximation est

$$2,5635 - 0,00006577 = 2,56343423.$$

Poisson trouve 2,56334 (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* t. **VIII**, p. 420).

Il n'y a pas de racines entre 180 et 270 degrés ; il en existe une dans le quatrième quadrant et $f''(x)$ reste toujours négative dans cet intervalle ; on peut donc la prendre pour fonction déterminante.

	$-$	$-$	$+$
(6,0)....	75,7,	100,34,	6,01,
	$-$	$-$	$-$
(6,1)....	67,95,	107,53,	4,38.

On déduit successivement :

1re approximation......	6,05
2e approximation......	6,0586
3e approximation.....	6,0586701

Poisson trouve 6,05973.

Le nombre des racines est infini ; la $n^{ième}$ est comprise entre $(n - \frac{1}{2})\pi$ et $n\pi$.

Observation. Dans la dernière édition de l'excellente *Algèbre* de M. Bertrand, on donne une théorie simple des approximations pour les équations transcendantes, convenable aux examens, très-utile aux candidats. En fait d'approximations, les méthodes générales ne dispensent jamais d'imaginer des procédés particuliers pour des cas particuliers.

SUR UNE ASSERTION DE GOLDBACH RELATIVE AUX NOMBRES IMPAIRS;

Par M. STERN,
Professeur à Gottingue.

Dans la *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres*, on lit (t. I, p. 595) un théorème sur les nombres que Goldbach avait trouvé par induction, savoir que tous les nombres impairs sont de la forme $p + 2a^2$, où p désigne au nombre premier, a un nombre entier ou zéro. Si ce théorème était vrai, il s'ensuivrait donc que tout nombre impair non premier est de la forme $p + 2b^2$, p étant un nombre premier et b un nombre entier plus grand que zéro, pendant que les nombres premiers ne sont pas tous de cette forme. Euler, auquel Goldbach avait communiqué ce théorème, dit l'avoir vérifié pour tous les nombres plus petits que 1000 et il ajoute qu'il a examiné beaucoup de nombres plus grands sans trouver une exception, et que par cette raison il croit ce théorème généralement vrai sans pourtant le vouloir garantir (*ib.*, page 596). D'un autre endroit (p. 606) on doit conclure qu'Euler a examiné au moins tous les nombres jusqu'à 2500.

Il y a quelque temps, j'étais conduit à répéter le calcul d'Euler sur tous les nombres plus petits que 1000 et je remarquai alors que les nombres premiers plus petits que cette limite qui *ne sont pas* de la forme $p + 2b^2$, sont tous de la forme $6n + 5$: ce sont les nombres 17, 137, 227, 977, pendant qu'il existe beaucoup de nombres

premiers qui sont en même temps de la forme $6n+5$ et de la forme $p+2b^2$, comme, par exemple, le nombre 41. C'est pour cela que j'engageai plusieurs jeunes géomètres étudiant à Gottingue à continuer le calcul. Ils ont d'abord examiné tous les nombres jusqu'à 6000, et cela a conduit au résultat remarquable que le théorème de Goldbach est faux. En effet, on trouve dans l'intervalle indiqué deux nombres impairs composés qui ne sont pas de la forme $p+2b^2$, le nombre $5777=53.109$ et le nombre $5993=13.461$. Mais nous avons pu remarquer en même temps qu'encore dans cet intervalle tous les nombres premiers ou composés qui ne sont pas de la forme $p+2b^2$, sont tous de la forme $6n+5$. Il y en a huit, savoir : 17, 137, 227, 977, 1187, 1493, 5777, 5993. Le calcul continué jusqu'à 9000 n'a plus donné aucune exception à la règle de Goldbach ; c'est-à-dire que tous les nombres impairs renfermés entre 6000 et 9000 sont tous de la forme $p+2b^2$. Il est donc prouvé par le calcul que tous les nombres impairs plus petits que 9000 qui ne sont pas de la forme $6n+5$, sont de la forme $p+2b^2$, et l'on peut demander si le théorème de Goldbach n'est pas au moins généralement vrai sous cette restriction.

PROBLÈME SUR LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE;

PAR M. POUDRA.

Deux courbes du troisième ordre passent par les quatre points communs a, b, c, d, en outre la première passe par les cinq points 1, 2, 3, 4, 5, et la deuxième par les

points $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, ce qui détermine complétement les deux courbes. On demande de trouver la section conique qui passe par les cinq autres points inconnus d'intersection des deux courbes.

Par les quatre points a, b, c, d, on trace les cinq coniques qui passent successivement par chacun des cinq points 1, 2, 3, 4, 5.

De même par les quatre points a, b, c, d et les cinq $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, on fait passer cinq autres coniques.

En un des points communs, tel que a, on mène les tangentes à ces deux séries de cinq coniques. On a ainsi deux faisceaux de cinq tangentes.

On détermine dans le plan le point P, d'où les cinq points 1, 2, 3, 4, 5 sont vus sous un faisceau homographique à celui des cinq premières tangentes; et de même le point P', d'où les cinq points $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$ sont vus sous un faisceau homographique à celui des secondes tangentes. On sait que le point P appartiendra à la première courbe du troisième ordre et le point P' à la seconde.

Si l'on voulait déterminer une infinité de points de ces deux courbes, on ferait passer par les quatre points a, b, c, d une infinité de coniques. On déterminerait leur tangente à un point commun a. On aurait un faisceau de tangentes, auquel correspondrait au point P un faisceau de droites, homographique avec celui des tangentes; mais de même au point P' on aurait un autre faisceau, homographique avec ce même faisceau de tangentes : donc ces deux faisceaux ayant pour sommet les points P et P', seront homographiques entre eux; par conséquent, les rayons homologues se couperaient suivant une section conique C passant par P et P'. Or, d'après la description des courbes du troisième ordre donnée par M. Chasles, chaque rayon de chaque faisceau coupe la conique correspondante en deux points de la courbe du troisième ordre,

donc on peut ainsi déterminer un nombre infini de points des deux courbes du troisième ordre; parmi les points, se trouvent les cinq points communs d'intersection de ces deux courbes correspondant à cinq coniques communes : donc ces cinq points se trouveront sur la conique C ci-dessus qui passe par les points P et P′ et qui contient tous les points d'intersection des deux faisceaux dont ces deux points sont les sommets.

Ce problème peut servir à résoudre le suivant :

Étant donnés les cinq points a, b, c, d, e *communs à deux courbes du troisième ordre, déterminer les quatre autres points d'intersection de ces deux courbes.*

On construira : 1° la conique ci-dessus relative aux quatre points a, b, c, d, puis celle qui est relative aux quatre points a, b, c et e. Ces deux coniques se couperont généralement en quatre points qui seront les points cherchés.

QUESTIONS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES. OCTOBRE 1855.

Mathématiques.

Similitude des figures planes.

Physique.

1°. Galvanomètre multiplicateur.
2°. Ammoniaque.

Histoire naturelle.

1°. De la digestion des mammifères.
2° Fonctions des racines.

QUESTION.

314. Construire la courbe à équation polaire

$$\rho^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}$$

et en donner *ad libitum* l'aire.

SOMMATION DES DEUX SUITES

$$\sum_{n=1}^{n=n} (a + n - 1)^{\alpha} h^{n-1}, \quad \sum_{n=1}^{n=n} [a + n - 1]^{\alpha} h^{n-1};$$

Par le P. PEPIN, S. J.

Le P. Riccati, dans son Mémoire *De seriebus summam algebraicam vel exponentialem recipientibus*, donne la somme de la série

$$1^{\alpha} k^1 + 2^{\alpha} k^2 + \ldots + (n - 1)^{\alpha} k^{n-1} \; (*).$$

Je me propose d'exprimer aussi par un nombre limité de termes algébriques ou exponentiels la somme de la série plus générale

$$\sum_{n=1}^{n=n} (a + n - 1)^{\alpha} h^{n-1}.$$

(*) C'est le P. Lecointe qui m'a fait connaître cette série et qui m'a engagé à entreprendre l'étude dont je donne ici les principaux résultats.

d'où l'on pourra déduire la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique, ainsi que la somme d'une série analogue

$$\sum_{n=1}^{n=n} [a+n-1]^{\alpha}\, h^{n-1},$$

en désignant avec Vandermonde par $[a+n-1]^{\alpha}$ la factorielle

$$(a+n-1)(a+n-2)\ldots(a+n-\alpha)$$

$\begin{cases} \alpha \text{ et } n \text{ sont entiers et positifs;} \\ a \text{ et } h \text{ sont quelconques.} \end{cases}$

1. Considérons la suite

$$X_{\alpha} = \sum_{n=1}^{n=n} (a+n-1)^{\alpha}\, k^{a+n-1}.$$

En différentiant, nous trouverons

$$X_{\alpha+1} = \sum_{n=1}^{n=n} (a+n-1)^{\alpha+1}\, k^{a+n-1} = k\,D_k . X_{\alpha}.$$

Si donc nous indiquons par le symbole $(kD_k)^p$, que l'on doit répéter p fois, une opération qui consiste à prendre la dérivée par rapport à k et à multiplier le résultat par k, nous obtiendrons successivement

$$X_{\alpha} = (k\,D_k).X_{\alpha-1} = (k\,D_k)^2.X_{\alpha-2} = \ldots = (k\,D_k)^{\alpha}.X_0.$$

Et comme

$$X_0 = k^a + k^{a+1} + \ldots + k^{a+n-1} = \frac{k^{a+n} - k^a}{k-1},$$

on aura

$$X_\alpha = \sum_{n=1}^{n=n} (a+n-1)^\alpha k^{a+n-1} = (k\,D_k)^\alpha \cdot \frac{k^{a+n} - k^a}{k-1}.$$

Posons enfin

$$k = h + \tau,$$

h désignant une constante et τ une variable infinimen petite; nous aurons pour la série proposée

$$\sum_{n=1}^{n=n} (a+n-1)^\alpha h^{n-1}$$

$$= h^{-a} \times \text{valeur de } [(h+\tau)\,D_\tau]^\alpha \frac{(h+\tau)^{a+n} - (h+\tau)^a}{h+\tau-1},$$

pour $\tau = 0$.

2. Supposons qu'en développant la fonction

$$\frac{(h+\tau)^{a+n} - (h+\tau)^a}{h-1+\tau}$$

suivant les puissances ascendantes de τ, on ait obtenu

$$\frac{(h+\tau)^{a+n} - (h+\tau)^a}{(h-1)+\tau}$$

$$= A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2 + A_3\tau^3 + \ldots + A_m\tau^m + \ldots.$$

Désignons par $h^m . \varpi_{m,\alpha}$ la valeur que prend l'expression

$$\frac{[(h+\tau)\,D_\tau]^\alpha . \tau^m}{1.2.3\ldots m}$$

quand, après avoir effectué les opérations indiquées, on

pose $\tau = 0$. On a évidemment

$$\varpi_{m,\alpha} = 0$$

si m est plus grand que α; l'équation obtenue précédemment deviendra donc

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n=1}^{n=n} (a+n-1)^{\alpha} h^{n-1} \\ = h^{-a} \left\{ \begin{array}{l} A_1 \; h \, \varpi_{1,\alpha} + A_2 \, h^2 . [2]^2 . \varpi_{2,\alpha} + \ldots \\ + A_{\alpha} . h^{\alpha} [\alpha]^{\alpha} . \varpi_{\alpha,\alpha} \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

3. Calcul des coefficients A_1, A_2, A_3,..., A_{α}.

Supposons d'abord que h ait une valeur différente de l'unité, nous aurons

$$\frac{(h+\tau)^{a+n} - (h+\tau)^a}{(h-1)+\tau} = \frac{h^a}{h-1} \left\{ \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 \tau + \ldots + \mathcal{A}_m \tau^m + \ldots \right\}$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{\tau}{1-h} + \frac{\tau}{(1-h)^2} + \ldots + \frac{\tau^m}{(1-h)^m} + \ldots \right\},$$

en posant, pour abréger,

$$\mathcal{A}_m = \frac{[a+n]^m . h^n - [a]^m}{[m]^m} . h^{-m}.$$

Le coefficient de τ^{μ} sera donc dans ce développement

$$(2) \qquad A_{\mu} = \frac{h^a}{h-1} . \sum_{m=0}^{m=\mu} \frac{[a+n]^m h^n - [a]^m}{[m]^m . h^m (1-h)^{\mu-m}}.$$

Si $h = 1$, on a

$$\frac{(1-\tau)^{a+n} - (1+\tau)^a}{\tau} = \frac{[a+n]^1 - [a]^1}{1}$$

$$+ \frac{[a+n]^2 - [a]^2}{[2]^2} . \tau + \ldots + \frac{[a+n]^{\mu+1} - [a]^{\mu+1}}{[\mu+1]^{\mu+1}} \tau^{\mu} + \ldots;$$

le coefficient de τ^μ est donc dans ce cas

$$(3) \qquad A_\mu = \frac{[a+n]^{\mu+1} - [a]^{\mu+1}}{[\mu]^\mu.[\mu+1]}.$$

4. Calcul de la fonction $\varpi_{m,\alpha}$ définie par l'équation

$$[m]^m.h^m \varpi_{m,\alpha} = \text{valeur de } [(h+\tau)\,D_\tau]^\alpha.\tau^m, \text{ pour } \tau = 0.$$

En effectuant une différentiation, on trouve

$$\begin{aligned} &[m]^m h^m.\varpi_{m,\alpha} \\ &= \left\{ mh.[(h+\tau)\,D_\tau]^{\alpha-1}.\tau^{m-1} + m\,[(h+\tau)\,D_\tau]^{\alpha-1}.\tau^m \right\}_{\tau=0} \\ &= mh.[m-1]^{m-1}.h^{m-1}.\varpi_{m-1,\alpha-1} + m\,[m]^m h^m.\varpi_{m,\alpha-1}. \end{aligned}$$

On a donc, en divisant par $[m]^m h^m$,

$$(A) \qquad \varpi_{m,\alpha} = \varpi_{m-1,\alpha-1} + m\varpi_{m,\alpha-1}.$$

On reconnaît aisément que

$$[(h+\tau)\,D_\tau]^\alpha.\tau = h+\tau;$$

d'où l'on conclut

$$\varpi_{1,\alpha} = 1, \quad \alpha > 0.$$

Cette condition jointe à l'équation (A) définit complétement la fonction $\varpi_{m,\alpha}$ et permet d'en calculer les valeurs successives. Pour trouver son expression générale en fonction des nombres α et m, nous emploierons la méthode des fonctions génératrices de Laplace.

Multiplions par x^α les deux membres de l'équation (A) et faisons la somme des résultats obtenus, en donnant

à α les valeurs successives 1, 2, 3,..., n, nous trouvons

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\left(\varpi_{m,\alpha}x^{\alpha}\right)=mx\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\left(\varpi_{m,\alpha-1}x^{\alpha-1}\right)$$

$$+x\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\left(\varpi_{m-1,\alpha-1}x^{\alpha-1}\right);$$

ou bien, en posant

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\left(\varpi_{m,\alpha}x^{\alpha}\right)=\mathrm{U}_m,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_m &= mx.\mathrm{U}_m+x.\mathrm{U}_{m-1}+x\left[m\varpi_{m,1}+\varpi_{m-1,0}\right]\\ &\quad -x^{n+1}\left[m\varpi_{m,n}+\varpi_{m-1,n}\right]\\ &= mx.\mathrm{U}_m+x\,\mathrm{U}_{m-1}-x^{n+1}\varpi_{m,n+1}+x\varpi_{m,1}.\end{aligned}$$

Si l'on convient de ne donner à m que des valeurs supérieures à l'unité, on aura

$$\varpi_{m,1}=0.$$

On déduira donc de l'équation précédente,

$$\mathrm{U}_m=\frac{x.\mathrm{U}_{m-1}}{1-mx}-\frac{x^{n+1}\varpi_{m,n+1}}{1-mx}.$$

On aura ainsi successivement

$$\mathrm{U}_2=\frac{x.\mathrm{U}_1}{1-2x}-\frac{x^{n+1}\varpi_{m,n+1}}{1-2x},$$

$$\mathrm{U}_3=\frac{x^2.\mathrm{U}_1-x^{n+1}\varpi_{m,n+1}\mathrm{F}(x)}{(1-2x)(1-3x)},$$

$$\mathrm{U}_4=\frac{x^3.\mathrm{U}_1-x^{n+1}\varpi_{m,n+1}\mathrm{F}_1(x)}{(1-2x)(1-3x)(1-4x)},$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{U}_m=\frac{x^{m-1}.\mathrm{U}_1-x^{n+1}\varpi_{m,n+1}f(x)}{(1-2x)(1-3x)\ldots(1-mx)};$$

$F(x)$, $F_1(x)$,..., $f(x)$ désignant des fonctions entières de la variable x. D'ailleurs la condition $\varpi_{1,\alpha} = 1$ nous donne

$$U_1 = x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x}{1-x} - \frac{x^n}{1-x};$$

on aura donc définitivement

$$U_m = \frac{x^m - x^{n+1}.F(x)}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\ldots(1-mx)},$$

$F(x)$ étant une fonction entière de x. Cette équation étant identique par rapport à x, le coefficient $\varpi_{m,\alpha}$ de x^α dans U_m doit être égal au coefficient de x^α dans le second membre. Or si nous supposons $n > \alpha$, ce coefficient ne dépend que de la fraction

$$\frac{x^m}{(1-x)(1-2x)\ldots(1-mx)}$$

$$= \frac{c_1}{1-x} + \frac{c_2}{1-2x} + \ldots + \frac{c_\rho}{1-\rho x} + \ldots + \frac{c_m}{1-mx}.$$

On aura donc

$$\varpi_{m,\alpha} = c_1 . 1^\alpha + c_2 . 2^\alpha + c_3 . 3^\alpha + \ldots + c_\rho . \rho^\alpha + \ldots + c_m . m^\alpha.$$

Pour déterminer la constante c_ρ, multiplions par $1 - \rho x$ les deux membres de l'équation précédente et faisons

$$x = \frac{1}{\rho},$$

nous trouvons

$$c_\rho = \frac{1}{\rho^m . \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)\left(1 - \frac{2}{\rho}\right)\cdots\left(1 - \frac{\rho - 1}{\rho}\right)\left(1 - \frac{\rho+1}{\rho}\right)\cdots\left(1 - \frac{m}{\rho}\right)};$$

d'où

$$c_\rho \cdot \rho^\alpha = \frac{(-1)^{m-\rho} \cdot \rho^{\alpha-1}}{[\rho-1]^{\rho-1}[m-\rho]^{m-\rho}}$$

$$= \frac{(-1)^{m-\rho}}{[m-1]^{m-1}} \cdot \frac{[m-1]^{\rho-1}}{[\rho-1]^{\rho-1}} \rho^{\alpha-1},$$

et, par suite,

$$(4) \left\{ \begin{aligned} \varpi_{m,\alpha} &= \sum_{\rho=1}^{\rho=m} \frac{(-1)^{m-\rho}}{[m-1]^{m-1}} \cdot \frac{[m-1]^{\rho-1}\rho^{\alpha-1}}{[\rho-1]^{\rho-1}} \\ &= \frac{m^{\alpha-1} - \frac{m-1}{1}(m-1)^{\alpha-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}(m-2)^{\alpha-1} - \ldots \pm 1}{1.2.3\ldots m-1} \end{aligned} \right.$$

5. Les formules (1), (2), (3) et (4) donnent la solution complète du problème proposé. Pour une valeur quelconque de h, différente de l'unité, on aura

$$\sum_{n=1}^{n=n} (a+n-1)^\alpha \cdot h^{n-1}$$

$$= \sum_{m=1}^{m=\alpha} \frac{h^m \cdot [m]^m \cdot \varpi_{m,\alpha}}{h-1} \cdot \sum_{\mu=0}^{\mu=m} \frac{[a+n]^\mu \cdot h^n - [a]^\mu}{[\mu]^\mu \cdot h^\mu \cdot (1-h)^{m-\mu}}.$$

Si, dans le cas où $h = 1$, on remplace a par $\frac{a}{r}$ et qu'on multiplie les deux membres par r^α, on aura la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est a et dont la raison est r :

$$a^{\alpha} + (a+r)^{\alpha} + (a+2r)^{\alpha} + \ldots + [a + (n-1)r]^{\alpha}$$

$$= r^{\alpha} \sum_{m=1}^{m=\alpha} \frac{\left[\frac{a}{r}+n\right]^{m+1} - \left[\frac{a}{r}\right]^{m+1}}{m+1}$$

$$\times \frac{m^{\alpha-1} - \frac{m-1}{1}(m-1)^{\alpha-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}(m-2)^{\alpha-1} - \ldots \pm 1}{1.2.3\ldots(m-1)}.$$

Cette formule a été donnée pour la première fois par M. Puiseux dans le XIe volume du *Journal* de M. Liouville.

Toutefois l'expression générale (4) de la fonction $\varpi_{m,\alpha}$ est fort mal appropriée au calcul. Le plus simple, dans les applications, sera de former pour cette fonction un triangle arithmétique, analogue à celui de Pascal pour les coefficients binomiaux. En voici un pour les dix premières puissances :

$\alpha =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	3	7	15	31	63	127	255	511
3			1	6	25	90	301	966	3025	9330
4				1	10	65	350	1701	7770	34105
5					1	15	140	1050	6951	42525
6						1	21	266	2646	22827
7							1	28	462	19980
8								1	36	750
9									1	45
10										1

Pour former et continuer ce tableau :

« Inscrivez d'abord l'unité dans toutes les cases de la première ligne horizontale et de la diagonale ;

» Les autres termes de chaque tranche horizontale s'obtiendront chacun en ajoutant au produit du terme précédent multiplié par le nombre qui exprime le rang de cette tranche, le terme situé immédiatement au-dessous de celui-là. »

Le nombre $\varpi_{m,\alpha}$ sera celui qui dans ce tableau est situé en même temps dans la tranche horizontale dont le rang est m et dans la colonne verticale dont le rang est α.

La première partie de la règle résulte des deux équations

$$\varpi_{1,\alpha} = 1, \quad \varpi_{\alpha,\alpha} = 1.$$

La seconde partie n'est que l'énoncé de l'équation

$$\varpi_{m,\alpha} = m\,\varpi_{m,\alpha-1} + \varpi_{m-1,\alpha-1}.$$

Veut-on, par exemple, la somme des cinquièmes puissances des termes d'une progression arithmétique, on prendra les coefficients $\varpi_{m,5}$ dans la cinquième colonne verticale du triangle précédent et la formule (1) donnera

$$\sum_{n=1}^{n=n} [a+(n-1)r]^5$$

$$= r^5 \left\{ \begin{aligned} & \frac{\left[\frac{a}{r}+n\right]^2 - \left[\frac{a}{r}\right]^2}{2} + 15\,\frac{\left[\frac{a}{r}+n\right]^3 - \left[\frac{a}{r}\right]^3}{3} \\ & + 25\,\frac{\left[\frac{a}{r}+n\right]^4 - \left[\frac{a}{r}\right]^4}{4} + 10\,\frac{\left[\frac{a}{r}+n\right]^5 - \left[\frac{a}{r}\right]^5}{5} \\ & + \frac{\left[\frac{a}{r}+n\right]^6 - \left[\frac{a}{r}\right]^6}{6} \end{aligned} \right\}.$$

6. Quant à la série $\sum_{n=1}^{n=n} [a+n-1]^{\alpha} h^{n-1}$, on en obtient immédiatement la somme à l'aide des résultats obtenus précédemment (nos 2 et 3).

Considérons la série

$$x_\alpha = \sum_{n=1}^{n=n} [a+n-1]^{\alpha} (h+\tau)^{a+n-1-\alpha}.$$

En différentiant les deux membres, on obtient la relation

$$D_\tau . x_\alpha = \sum_{n=1}^{n=n} [a+n-1]^{\alpha+1} (h+\tau)^{a+n-1-(\alpha+1)} = x_{\alpha+1};$$

on a, par conséquent,

$$x_\alpha = D_\tau^\alpha . \frac{(h+\tau)^{a+n} - (h+\tau)^a}{h-1+\tau} = D_\tau^\alpha . x_0.$$

Or nous avons vu (n° 3) que l'on peut toujours poser, en supposant τ très-petit,

$$x_0 = A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2 + \ldots + A_m\tau^m + \ldots,$$

A_m étant défini par l'équation (1) ou par l'équation (3) suivant que h a une valeur différente de l'unité ou qu'il est égal à l'unité.

On aura donc

$$x_\alpha = [\alpha]^\alpha A_\alpha + [\alpha+1]^{\alpha+1} A_{\alpha+1}\tau + \ldots$$

En faisant $\tau = 0$ et divisant les deux membres par $h^{a-\alpha}$,

on obtient la somme cherchée

$$\sum_{n=1}^{n=n} [a+n-1]^{\alpha}\, h^{n-1} = h^{-a+\alpha}[\alpha]^{\alpha} A_{\alpha}.$$

Si $h = 1$, cette formule donne le résultat connu

$$\sum_{n=1}^{n=n} [a+n-1]^{\alpha} = \frac{[a+n]^{\alpha+1} - [a]^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

7. On peut obtenir sous d'autres formes l'expression de la fonction $\varpi_{m,\alpha}$. En effet, si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\ldots(1-mx)} = F(x),$$

$\varpi_{m,\alpha}$ est le coefficient de x^{α} dans le développement de $x^m . F(x)$ suivant les puissances entières et positives de x; on aura donc autant de manières de l'obtenir qu'il y a de manières d'effectuer le développement de $x^m . F(x)$.

Or si nous désignons généralement par p_n la somme des produits n à n des nombres 1, 2, 3,..., m, nous aurons

$$(1-x)(1-2x)(1-3x)\ldots(1-mx)$$
$$= 1 - p_1 x + p_2 x^2 - p_3 x^3 + p_4 x^4 - \ldots \pm p_m x^m = 1 - X$$

en posant

$$p_1 x - p_2 x^2 + p_3 x^3 - \ldots \mp p_m x^m = X.$$

On aura donc

$$F(x) = \frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + \ldots$$
$$= 1 + p_1 x + (p_1^2 - p^2) x^2 + (p_1^3 - 2p_1 p_2 + p_3) x^3 + \ldots,$$

et, par suite,

$$\varpi_{m,m} = 1, \qquad \varpi_{m,m+1} = p_1,$$
$$\varpi_{m,m+2} = p_1^2 - p, \quad \varpi_{m,m+3} = p_1^3 - 2p_1p_2 + p_3, \ldots$$

D'ailleurs

$$p_1 = \sum_{m=1}^{m=m} m \cdot \frac{m(m+1)}{2},$$

$$p_2 = \sum_{m=2}^{m=m} m \cdot \frac{m(m-1)}{2},$$

$$p_3 = \sum_{m=3}^{m=m} \cdot m \sum_{m=2}^{m=m-1} m \cdot \frac{m(m-1)}{2}, \ldots$$

En appliquant la formule générale,

$$\sum_{m=\alpha}^{m=m} [m]^\alpha = \frac{(m+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

on trouve

$$p_2 = \sum_{m=2}^{m=m} \left\{ \frac{m(m-1)(m-2)}{2} + m(m-1) \right\}$$
$$= \frac{[m+1]^4}{2.4} + \frac{[m+1]^3}{3} = \frac{(m+1)m(m-1)(3m-2)}{24},$$

$$p_3 = \sum_{m=3}^{m=m} \left\{ \frac{[m]^4(m-4)}{2.4} + \frac{[m]^4}{2} + \frac{[m]^3(m-3)}{3} + [m]^3 \right\}$$
$$= \frac{[m+1]^6}{48} + \frac{[m+1]^5}{10} + \frac{[m-1]^5}{15} + \frac{[m+1]^4}{4}$$
$$= \frac{(m+1)^2 \cdot m^2 \cdot (m-1)(m-2)}{48}.$$

On aura par suite

$$\varpi_{m,m+2} = \frac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24},$$

$$\varpi_{m,m+3} = \frac{m^2(m+1)^2(m+2)(m+3)}{48}.$$

En comparant ces valeurs de $\varpi_{m,m}$, $\varpi_{m,m+1}$, $\varpi_{m,m+2}$, $\varpi_{m,m+3},\ldots$, avec celles que fournit la formule (4), on obtient les relations données par M. Puiseux dans le Mémoire déjà cité.

On reçonnaît aussi que $\varpi_{m,\alpha} = 0$ si m est plus grand que α. On a donc ce théorème :

m *désignant un nombre entier et positif quelconque, si* n *est un nombre entier et positif plus petit que* m — 1, *on a la relation*

$$m^n - \frac{m-1}{1}(m-1)^n + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}(m-2)^n - \ldots \pm 1 = 0.$$

SUR LES SECTIONS CIRCULAIRES DU TORE

et des surfaces de révolution algébriques d'ordre quelconque ;

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

J'ai eu la curiosité de rechercher par l'analyse toutes les sections circulaires du tore. On sait que M. Yvon Villarceau en a trouvé pour ces surfaces qui ne sont ni des *parallèles*, ni des *méridiens*. J'ai reconnu que ces sections sont les seules de ce genre que l'on puisse trouver pour le tore, et que, parmi les surfaces algébriques de révolution

à équation *irréductible* d'un degré supérieur au quatrième, aucune n'admet des sections circulaires obliques à l'axe, ni même des sections planes dont l'ordre soit inférieur à la moitié du nombre qui marque le degré de l'équation de la surface. Cette proposition peut être démontrée assez simplement comme il suit.

Lorsqu'une surface de révolution admet une section circulaire qui n'est pas un parallèle, cette section, en tournant autour de l'axe, engendre nécessairement la surface elle-même. Soit donc une circonférence tournant autour d'un axe situé d'une manière quelconque par rapport à elle. Je prends pour axe des coordonnées l'axe de révolution et deux autres droites perpendiculaires entre elles situées dans le plan de la circonférence décrite par le centre du cercle mobile. Parmi toutes les positions de ce cercle, je choisis celle où la trace de son plan sur le plan des xy est parallèle à l'axe des y. Cela posé, j'appelle α, β l'abscisse et l'ordonnée du centre, ρ le rayon, et φ l'inclinaison du plan du cercle sur celui des xy. Ce cercle résultera évidemment de l'intersection de la sphère qui a pour équation

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=\rho^2$$

avec le plan qui a d'autre part pour équation

$$(2) \qquad z=(x-\alpha)\operatorname{tang}\varphi;$$

X étant le rayon d'un parallèle quelconque de la surface décrite, on aura

$$(3) \qquad X^2=x^2+y^2.$$

Si donc on élimine x et y entre ces trois équations, la relation entre X et z que l'on obtiendra sera l'équation de la section méridienne de la surface.

A cet effet, je développe les deux carrés de l'équa-

tion (1), je remplace $x^2 + y^2$ par X^2 et x par $\alpha + \frac{z}{\tang \varphi}$ et il vient

$$y = \frac{1}{2\beta}\left[X^2 + z^2 - \frac{2\alpha z}{\tang \varphi} - \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2\right],$$

et, par suite,

$$(4)\left(\alpha + \frac{z}{\tang \varphi}\right)^2 + \frac{1}{4\beta^2}\left[X^2 + z^2 - \frac{2\alpha z}{\tang \varphi} - \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2\right]^2 - X^2 = 0.$$

Cette équation est du quatrième degré, et lorsqu'on y remplace X^2 par $x^2 + y^2$ pour avoir celle de la surface, son degré ne change pas, de sorte que la surface dont il s'agit est du quatrième ordre, de même que sa section méridienne. On voit par là que si une surface de révolution d'un ordre n supérieur au quatrième admettait une section circulaire qui ne fût pas un parallèle, le premier membre de son équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

supposée mise sous forme rationnelle et entière, serait divisible par un facteur tel que

$$\left(\alpha + \frac{z}{\tang \varphi}\right)^2 + \frac{1}{4\beta^2}\left[x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2\alpha z}{\tang \varphi} - \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2\right]^2 - (x^2 + y^2),$$

ce qui est la seconde partie de la proposition énoncée ci-dessus.

Plus généralement, si au lieu de l'équation (1) nous en considérons une de degré n,

$$\varphi(x, y) = 0,$$

et que nous la combinions avec l'équation (2), nous aurons une courbe de degré n, laquelle tournant autour de l'axe des z engendrera une surface, et en éliminant x et y à l'aide de l'équation (3), on aura l'équation de la sec-

tion méridienne de cette surface. Or φ étant du degré n, la substitution de $\sqrt{X^2 - x^2}$ au lieu de y donnera une équation au plus du degré $2n$ après la disparition des radicaux. D'ailleurs le degré ne s'élèvera pas en faisant ensuite

$$x = \alpha + \frac{z}{\operatorname{tang} \varphi},$$

donc la section méridienne sera tout au plus de l'ordre $2n$. Et comme cette élimination n'introduit évidemment que des puissances paires de x, il en sera de même de l'ordre de la surface. Donc, *toute section faite dans une surface algébrique de révolution à équation irréductible par un plan oblique à l'axe est d'un ordre égal à la moitié au moins du degré de l'équation.*

Il ne nous reste plus qu'à examiner quelles sont les relations qui doivent exister entre les données α, β, ρ et φ pour que la surface décrite soit un tore, et par là nous connaîtrons *toutes* les sections circulaires que le tore admet. Développons l'équation (4), elle devient

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &(X^2 + z^2)^2 - \frac{4\alpha}{\operatorname{tang} \varphi}(X^2 + z^2) z - 2(\alpha^2 + \rho^2) X^2 \\ &+ \left[\frac{4(\alpha^2 + \beta^2)}{\operatorname{tang}^2 \varphi} - 2(\alpha^2 - \beta^2 + \rho^2) \right] z^2 \\ &+ \frac{4(\alpha^2 + \beta^2 + \rho^2)}{\operatorname{tang} \varphi} z + (\alpha^2 - \beta^2 + \rho^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

et son premier membre, si la surface est un tore, doit être divisible par un facteur de la forme

$$(X - R)^2 + (z - c)^2 - r^2,$$

car en égalant ce facteur à zéro, on a une circonférence de cercle. Mais il doit être divisible en même temps par

le facteur

$$(X + R)^2 + (z - c)^2 - r^2,$$

lequel égalé à zéro donne la position symétrique du méridien circulaire par rapport à l'axe des z. Or le produit de ces deux facteurs est

$$(X^2 + z^2 - 2cz + R^2 + c^2 - r^2)^2 - 4R^2X^2,$$

ou, en développant,

$$(X^2 + z^2)^2 - 4c(X^2 + z^2)z + [2(R^2 + c^2 - r^2) - 4R^2]X^2$$
$$+ [2(R^2 + c^2 - r^2) + 4c^2]z^2$$
$$- 4c(R^2 + c^2 - r^2)z + (R^2 + c^2 - r^2)^2.$$

Ce polynôme devant être identique avec le premier membre de l'équation (5), on a entre les coefficients les relations

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} c &= \frac{\alpha}{\operatorname{tang}\varphi}, \\ (R^2 + c^2 - r^2 - 2R^2 &= -(\alpha^2 + \beta^2 + \rho^2), \\ (R^2 + c^2 - r^2) + 2c^2 &= -(\alpha^2 - \beta^2 + \rho^2) + \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{\operatorname{tang}^2\varphi}, \\ c(R^2 + c^2 - r^2) &= -\frac{a}{\operatorname{tang}\varphi}\cdot(\alpha^2 + \beta^2 + \rho^2) \\ (R^2 + c^2 - r^2)^2 &= (\alpha^2 - \beta^2 + \rho^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2. \end{aligned} \right.$$

C'est en éliminant R, c, r entre ces cinq équations que nous découvrirons les conditions auxquelles il faut satisfaire pour que la surface décrite soit un tore. J'ai laissé à dessein le trinôme $R^2 + c^2 - r^2$ en évidence, parce que l'élimination est rendue par là plus facile.

En combinant la première de ces équations avec la

troisième et la quatrième, on trouve d'abord

$$R^2 + c^2 - r^2 = \frac{2\beta^2}{\tang^2\varphi} - (\alpha^2 - \beta^2 + \rho^2),$$

$$\frac{\alpha}{\tang\varphi}(R^2 + c^2 - r^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \rho^2) = 0;$$

puis, en chassant $R^2 + c^2 - r^2$,

$$(7) \qquad \frac{\alpha\beta^2}{\tang\varphi}\left(1 + \frac{1}{\tang^2\varphi}\right) = 0.$$

Portant ensuite la valeur ci-dessus de $R^2 + c^2 - r^2$ dans la cinquième équation, il vient

$$(8) \qquad \beta^2\left[\frac{\beta^2}{\tang^4\varphi} - \frac{\alpha^2 - \beta^2 + \rho^2}{\tang^2\varphi} - \alpha^2\right] = 0.$$

En employant la seconde des équations (6), on n'obtiendrait aucune nouvelle condition, de sorte que les équations (7) et (8) renferment toutes les solutions du problème.

On peut vérifier la relation (7) de trois manières : 1° en faisant $\frac{1}{\tang\varphi} = 0$; 2° en faisant $\beta = 0$; 3° en faisant $\alpha = 0$.

Dans le premier cas, si β n'est pas nul, la relation (8) donne $\alpha = 0$. Le cercle décrivant est alors dans le plan des yz et se confond avec une section méridienne.

Dans le second cas, celui où l'on fait $\beta = 0$, il est facile de voir que la surface décrite est une sphère, quelle que soit la valeur de φ, et que conséquemment elle ne peut être un tore.

Reste donc le troisième cas, celui où l'on fait $\alpha = 0$, β et $\frac{1}{\tang\varphi}$ n'étant pas nuls. La relation (8) donne alors

$$\beta^2 = \rho^2 \sin^2\varphi,$$

d'où

$$R^2 = \rho^2, \quad c = 0, \quad r^2 = R^2 \sin^2\varphi.$$

Cette solution donne précisément le système de sections circulaires découvert par M. Yvon Villarceau, et on voit en même temps que le tore n'en admet pas d'autres.

SOLUTION DE LA QUESTION 308;

Par M. COMBESCURE,
Professeur au lycée de Bourges.

Inscrire dans un arc de section conique trois cordes consécutives formant trois segments équivalents.

(Chasles.)

1°. *Parabole*. L'équation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet étant

$$y^2 = 2px,$$

un segment correspondant aux points (x_1, y_1), (x_2, y_2) aura pour expression

$$\frac{2}{3}x_2 y_2 - \frac{(x_2 - x_1)(y_2 + y_1)}{2} - \frac{2}{3}x_1 y_1$$

ou

$$\frac{1}{6}(x_2 y_2 - x_1 y_1) + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2),$$

ou, à cause de l'équation de la parabole,

$$\frac{1}{4p}\left\{\frac{y_2^3 - y_1^3}{3} + y_1^2 y_2 - y_2 y_1^2\right\}$$

$$= \frac{(y_2 - y_1)}{4p}\left\{\frac{y_2^2 + y_1 y_2 + y_1^2)}{3} - y_1 y_2\right\} = \frac{(y_2 - y_1)^3}{12p}.$$

Donc si l'on veut inscrire dans un arc de parabole n cordes successives donnant lieu à n segments égaux, il suffira de diviser la partie $y_{n+1}-y$ de l'axe des y, qui représente la projection de l'arc, en n parties égales, et de mener des parallèles à l'axe par les points de division. La jonction successive des points où ces parallèles coupent la parabole donnera lieu aux segments demandés.

2°. *Hyperbole.* On peut se borner à l'hyperbole équilatère, sauf à transporter la solution à une hyperbole quelconque au moyen d'une projection cylindrique. Soit donc

$$xy = a^2$$

l'équation d'une pareille hyperbole. Un segment a pour mesure

$$\frac{(x_2 - x_1)}{2}(y_2 + y_1) - a^2 \log \frac{x_2}{x_1},$$

x_1, y_1, x_2, y_2 désignant les coordonnées des extrémités de l'arc. D'après l'équation de l'hyperbole, cette expression peut s'écrire

$$a^2 \left\{ \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1 x_2} - \log \frac{x_2}{x_1} \right\}$$

ou

$$a^2 \left\{ \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} - \log \frac{x_2}{x_1} \right\},$$

Donc, si l'on considère n segments successifs et que l'on pose

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = \ldots = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{z}{m},$$

d'où

$$z^m - m^n \frac{x_{n+1}}{x_1} = 0,$$

tous les segments dont il s'agit seront équivalents. On voit que la division d'un arc en n parties répondant à n segments équivalents, revient à l'insertion de n moyens proportionnels entre les. abscisses extrêmes x_1 et x_{n+1}. On reconnaît d'ailleurs tout de suite, sur la figure, que le mode de division est unique. Dans le cas de $n = 3$, en écrivant x pour z, on aura à résoudre l'équation

$$x^3 = m^3 \frac{x_4}{x_1};$$

ou, en posant

$$\frac{m^2 x_4}{x_1} = a^2,$$

à chercher l'intersection de la parabole

$$x^2 = my$$

et de l'hyperbole donnée

$$xy = a^2.$$

Quant à m, on prendra la quatrième proportionnelle

$$a_1 = \frac{a x_1}{x_4},$$

puis la moyenne proportionnelle

$$m^2 = a a_1.$$

Si α désigne l'abscisse du point d'intersection de la parabole auxiliaire avec l'hyperbole donnée, on aura par des quatrièmes proportionnelles,

$$x_2 = \frac{\alpha x_1}{m}, \quad x_3 = \frac{\alpha x_2}{m}.$$

3°. *Ellipse.* L'équation de la courbe étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

si l'on décrit un cercle sur le grand axe comme diamètre, les ordonnées Y_1, Y_2 qui répondent sur ce cercle aux abscisses x_1, x_2 des points (x_1, y_1), (x_2, y_2) de l'ellipse déterminent avec l'axe du cercle correspondant et l'axe des x une aire qui est l'aire elliptique homologue dans le rapport de a à b. En désignant par φ_1, φ_2 les angles que les rayons du cercle relatifs aux deux extrémités de l'arc circulaire font avec l'axe des y, l'aire elliptique dont il s'agit aura donc pour expression

$$\frac{b}{a}\left[a^2(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{a^2}{2}\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{Y_2 + Y_1}{2}(x_2 - x_1)\right],$$

c'est-à-dire

$$ab\left[(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{1}{2}\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\right] + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)(x_2 - x_1).$$

Le segment elliptique a donc pour expression de sa mesure

$$ab\left[(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{1}{2}\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\right].$$

Donc, si l'on veut diviser un arc d'ellipse en n parties telles, que les segments correspondants soient égaux, il suffira de prendre, attendu que le mode de division est unique,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2 = \ldots = \varphi_{n+1} - \varphi_n,$$

c'est-à-dire qu'il faudra diviser en n parties égales l'arc de cercle déterminé, comme il a été dit, par les ordonnées extrêmes. Les perpendiculaires à l'axe des x menées par les points de division détermineront sur l'arc elliptique les points dont la jonction successive donnera la solution de la question. Dans le cas de $n = 3$, la trisection de l'angle

peut se faire, comme on sait, de diverses manières par l'intersection de coniques. Je ne m'arrêterai pas là-dessus.

NOUVELLE MANIÈRE D'ÉVALUER L'AIRE D'UN TRIANGLE SUR LE TERRAIN;

Par M. BAILLY,
Professeur à l'Institution Barbet.

Menons du sommet A d'un triangle ABC deux obliques AD, AE au côté opposé BC, chacune faisant avec ce côté un angle de 60 degrés. Le triangle équilatéral ADE ayant même hauteur que le triangle ABC, on a

$$\text{aire ABC} = \frac{\text{BC}}{\text{DE}} \cdot \text{aire ADE}.$$

Prenons pour unité de surface l'aire du triangle équilatéral qui a pour côté l'unité de longueur, alors

$$\text{aire ADE} = \overline{\text{DE}}^2,$$

c'est-à-dire autant il y a d'unités dans $\overline{\text{DE}}^2$, autant l'aire ADE renferme d'unités superficielles; donc

$$\text{aire ABC} = \text{BC}.\text{DE}.$$

A l'aide d'une équerre d'arpenteur, de forme hexagonale, il est facile de trouver sur le terrain les points D et E; sur une telle équerre, on peut pratiquer des rainures formant des angles de 90 et de 60 degrés; après avoir mesuré et jalonné la base BC, on marchera avec l'équerre en partant de B, une des rainures étant constamment dirigée vers C, et on s'arrête lorsqu'à travers la rainure de

60 degrés on apercevra le sommet A ; on jalonne ainsi le point D, et de même le point E. Après avoir mesuré DE, le produit BC.DE indique le nombre de fois que l'aire ABD contient l'aire du triangle équilatéral pris pour unité de surface ; cette dernière est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}$; donc

$$\text{aire ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \text{BC.DE}.$$

Ce produit donne le nombre de mètres carrés, si le mètre est l'unité de longueur. Après avoir jalonné le point D, on peut se servir de l'angle de 90 degrés de l'équerre et jalonner le point F, d'où l'on aperçoit A sous l'angle de 90 degrés ; alors

$$\text{DF} = \frac{1}{2}\,\text{DE}$$

et

$$\text{aire ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{BC.DF}.$$

Par cette méthode, on n'a pas besoin de se transporter au point A, et l'on peut trouver l'aire du triangle ABC lorsque le point A est inaccessible.

Note du Rédacteur. Ce procédé est annoncé d'une manière singulière dans un recueil qui fait autorité dans la science : « M. Bailly présente des considérations sur la » mesure des surfaces et sur l'*erreur* dans laquelle, sui- » vant lui, les géomètres seraient tombés à cet égard. » (*Comptes rendus*, t. XLI, 1855, p. 1063.)

On peut faire

$$\text{ADE} = 45^\circ;$$

alors

$$\text{AF} = \text{DF}$$

et

$$\text{aire ABC} = \tfrac{1}{2}\,\text{BC.DF}.$$

QUESTIONS.

315. Soit un système de n forces appliquées au point A et représentées en grandeur et en direction par les longueurs AM_1, AM_2, AM_3,..., AM_n, et soit AN la résultante. E étant un point quelconque dans l'espace, formons l'expression

$$\overline{M_1 E}^2 + \overline{M_2 E}^2 + \overline{M_3 E}^2 + \ldots + \overline{M_n E}^2 - \overline{AE}^2.$$

Cette expression est un minimum lorsque le point E coïncide avec N.

(H. Burhenne, professeur à Cassel.)

316. Toute progression arithmétique où la raison et le premier terme sont premiers entre eux renferme un nombre infini de termes premiers à un nombre donné quelconque. (Jacobi.)

347. On donne sur un plan : 1° une conique S; 2° cinq point fixes a, b, c, d, P, dont l'un, a, est pris sur le périmètre de la conique. On propose de mener par le point P une transversale qui coupe la conique en deux points (réels ou imaginaires) ε, φ situés avec les quatre a, b, c, d sur une même conique. Démontrer qu'il existe, en général, deux solutions. (De Jonquières.)

318. La courbe à double courbure du quatrième ordre provenant de l'intersection de deux cônes de révolution dont les axes sont parallèles est telle, que la somme des distances de chacun de ses points aux sommets des deux cônes multipliés respectivement par des constantes est constant : cette courbe, ainsi que les ovales de Descartes, a un troisième foyer. (Chasles.)

319. Deux plans P, P' coupant une surface S suivant deux courbes I, I', la projection de la courbe I sur le

plan P′ sera tangente à la courbe I′ aux points où la trace de P sur P′ pourra couper I′, si les coordonnées de ces points satisfont à l'équation

$$D_z . F = 0,$$

déduite de l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

de S, par rapport à trois axes rectangulaires, dont deux, sur lesquels on compte x et y, doivent être dirigés dans le plan P′.

(La condition $D_z F = 0$, nécessaire et suffisante pour le contact dont il s'agit, est remplie pour les surfaces du second ordre lorsque P′ est un plan principal.)

(DIEU.)

320. On convient avec un puisatier de lui payer 100 fr. pour creuser un puits de 60 mètres ; au bout de 30 mètres, il tombe malade. Combien lui revient-il pour le travail exécuté? (P. RAMUS.)

SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE

(voir t. XIV, p. 401);

PAR M. DELAIRE,
Élève de l'école préparatoire des Carmes (classe de M. Gerono).

Sur le diamètre d'un grand cercle d'une sphère comme axe, on décrit une lemniscate, on fait une projection stéréographique de cette courbe sur la sphère; cette projection renferme une partie de l'hémisphère. L'aire de la partie restante de l'hémisphère est égale au carré du diamètre de la sphère. (H. D'ARREST.)

Imaginons la sphère de rayon a dont le centre est à

l'origine, et supposons que l'on ait tracé une lemniscate dans le plan des xy en prenant pour ligne focale le diamètre dirigé suivant l'axe des x. Cette courbe sera représentée par

$$(1) \qquad (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2),$$
$$(2) \qquad z = 0.$$

Pour obtenir la projection stéréographique de cette courbe sur la sphère, il faut imaginer un cône dont le sommet serait le pôle du grand cercle sur lequel on a tracé la lemniscate et dont la directrice serait cette courbe elle-même.

La génératrice de ce cône dont le sommet est le point $z=-a$, $x=0$, $y=0$, aura des équations de la forme

$$(3) \qquad x = my,$$
$$(4) \qquad (z+a) = ny.$$

Éliminant x, y, z entre les quatre équations précédentes, nous obtenons la relation qui doit exister entre m et n pour que la génératrice s'appuie sur la directrice.

On a ainsi

$$(5) \qquad (m^2+1)^2 = (m^2-1)\,m^2 n^2.$$

Si maintenant nous éliminons entre les équations (3), (4), (5) les quantités m et n qui seules particularisent la génératrice, la relation

$$(6) \qquad (x^2+y^2)^2 = (z+a)^2(x^2-y^2),$$

à laquelle nous parvenons, sera l'équation du cône. D'ailleurs la sphère est représentée par

$$(7) \qquad x^2+y^2+z^2 = a^2.$$

L'ensemble de ces deux équations (6), (7) représente donc la projection stéréographique de la lemniscate donnée.

Cherchons maintenant la projection de l'intersection des deux surfaces sur le plan des zy. Il faut alors éliminer x entre les équations (6) et (7), ce qui conduit à

$$2(z+a)^2(-z^2+az-y^2)=0,$$

c'est-à-dire, d'une part, le point

$$z=-a, \quad x=0, \quad y=0$$

qui est le sommet, et, d'autre part, le cercle

$$z^2+y^2-az=0.$$

Il faut maintenant chercher l'aire de la partie restante de l'hémisphère lorsqu'on enlève la portion qui est intérieure à la courbe d'intersection des deux surfaces. Considérons seulement la portion de sphère située dans l'angle des coordonnées positives. La projection sur le plan zoy de l'aire cherchée est la surface du quart de grand cercle moins le demi-cercle de rayon $\frac{a}{2}$.

Pour simplifier les calculs, nous ferons usage des coordonnées polaires dans le plan des zoy en prenant l'origine pour pôle.

Le cercle de rayon $\frac{a}{2}$ est alors représenté par le système

$$x=0, \quad r=a\cos\theta,$$

et on a de plus

$$r^2=z^2+y^2=a^2-x^2,$$

d'après l'équation de la sphère.

Considérons dans la projection sur le plan zoy de l'aire que nous cherchons un élément superficiel du second ordre $r\,dr\,d\theta$, où r représente la distance à l'origine. Cet

élément est la projection d'un élément de la surface sous un angle égal à celui que forme le plan des zy avec le plan tangent à la sphère au point déterminé par la position de l'élément considéré. Donc, en divisant l'élément $r\,dr\,d\theta$ par le cosinus de cet angle, nous aurons l'expression de l'élément même de la surface. Or ce cosinus est ici $\frac{x}{a}$ ou $\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a}$; il suffit donc de calculer

$$a\int\int\frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Si l'on attribue d'abord à θ une valeur constante, on aura alors un élément d'un secteur, et faisant la somme de pareils éléments depuis $r = a\cos\theta$ jusqu'à $r = a$, et intégrant de $\theta = 0$ à $\theta = \frac{\pi}{2}$, on aura l'aire totale. On a successivement dans ce double calcul

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a\cos\theta}^{a} \frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}} = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta,$$

et

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta = a^2.$$

Ainsi dans le quart de l'hémisphère l'aire cherchée est a^2; donc dans l'hémisphère entier elle sera $4a^2$ ou le carré du diamètre de la sphère.

C. Q. F. D.

L'analogie de ce problème avec celui de la voûte carrable de Viviani est évidente. Viviani traçait deux cercles sur les rayons OA, OA′ comme diamètres, puis il considérait ces cercles comme bases de cylindres dont les géné-

ratrices étaient parallèles à oz. Ces cylindres enlevaient à chaque hémisphère une portion de la surface sphérique; la partie restante était, comme ici, égale à $4a^2$. Les projections de l'intersection des cylindres et de la sphère sur les plans de coordonnées étaient les mêmes que les projections de la courbe que nous avons obtenue ici, mais elles se présentaient différemment. Ainsi sur le plan des zx on trouve dans la question que nous avons traitée la parabole

$$x^2 + ar - a^2 = o,$$

et dans l'autre la même parabole dont le sommet a tourné de 90 degrés,

$$z^2 + ax - a^2 = o.$$

Sur le plan des xy dans le problème de Viviani on trouve le cercle $r = a \cos\theta$ qui est la projection sur le plan zoy de la courbe que nous avons obtenue ici; et enfin cette même ligne se projette sur le plan des xy suivant la courbe qui est la projection de la fenêtre de Viviani sur le plan zoy. Cette courbe est représentée par l'équation

$$z^4 - a^2 r^2 + a^2 y^2 = o.$$

Elle offre un nœud à l'origine et rappelle la lemniscate par sa forme générale. L'aire de cette projection est égale à $\frac{4}{3}a^2$, comme il est facile de s'en assurer d'après son équation.

Connaissant la solution du problème de Viviani, on pouvait vérifier immédiatement le théorème énoncé; car la projection stéréographique de la lemniscate est représentée par

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + r^2 = a^2,$$

$$(2) \qquad (x^2 + y^2)^2 = (r + a)^2 (x^2 - y^2),$$

et la fenêtre de Viviani, en supposant les génératrices des cylindres parallèles à ox, est donnée par l'équation

$$(3) \qquad y^2 + r^2 - az = 0$$

jointe à l'équation (1).

Or, en éliminant x entre les équations (1) et (2), on trouve précisément l'équation (3). Donc la projection stéréographique de la lemniscate n'est autre chose que la fenêtre de Viviani, puisque ces deux courbes se trouvent représentées par les mêmes équations. Mais nous avons préféré donner une solution directe du problème.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 296

(voir t. XIV, p. 50);

Par M. POUDRA.

Étant donnés sur un plan A sept points désignés par a; b, c, d, e, f, g et sur un autre plan A′ sept autres points a', b', c', d', e', f', g', correspondants respectivement aux premiers : on demande de trouver dans chacun de ces plans A et A′ un point P et P′ tels, que le faisceau formé par les sept rayons Pa, Pb, Pc, Pd, Pe, Pf, Pg soit homographique avec le faisceau formé de même par les sept rayons P′a', P′b', P′c', P′d', P′e', P′f', P′g'.

Considérons d'abord les six points a, b, c, d, e, f et les points respectivement correspondants a', b', c', d', e', f', et cherchons les lieux des points p et p' qui dans les deux plans A et A′ sont tels, que les six rayons pa, pb, pc, pd, pe, pf forment un faisceau homographique à celui des rayons $p'a'$, $p'b'$, $p'c'$, $p'd'$, $p'e'$, $p'f'$, ces lieux sont des courbes du troisième ordre passant chacune par les

six points donnés, comme l'a démontré analytiquement M. Abadie (t. XIV, p. 142).

Transformons la figure A′ en une autre figure homographique située sur le plan A et telle, qu'aux quatre points a', b', c', d' de cette figure correspondent les quatre points a, b, c, d de la première. Les deux autres points e', f' deviendront, dans cette transformation, deux points e'_1, f'_1 situés sur le plan A. Si l'on joint alors par des droites les deux points e et e'_1 et ceux f et f'_1, le point p_1 d'intersection de ces deux droites sera bien tel, que les six droites $p_1 a$, $p_1 b$, $p_1 c$, $p_1 d$, $p_1 e$, $p_1 f$ formeront un faisceau homographique avec celui qui est formé par les droites $p_1 a$, $p_1 b$, $p_1 c$, $p_1 d$, $p_1 e'_1$, $p_1 f'_1$ puisqu'ils sont superposés. A ce point p_1 de la figure A correspondra dans la figure A′ un point p' qui sera donc un des points de la courbe cherchée. Or, comme on a deux couples de six points, on peut faire la transformation ci-dessus de quinze manières différentes. On aura donc ainsi quinze points de chacune des courbes cherchées et qui en outre passent respectivement par les six points donnés, ce qui fait en tout vingt et un points. Mais en nous aidant de ce principe que la courbe est du troisième ordre, il suffira d'en déterminer trois par cette méthode, ce qui, avec les six points donnés, formera neuf points avec lesquels on pourra construire chacune de ces courbes par une des belles méthodes données par M. Chasles.

On construira de même deux autres courbes du troisième ordre lieu des sommets des faisceaux homographiques passant par les six points a, b, c, d, e et g et par les points correspondants a', b', c', d', e', g'.

Les points d'intersection des deux courbes du troisième ordre situés dans le plan A et ceux respectifs dans le plan A′ seront les points cherchés tels, que le faisceau passant par les sept points a, b, c, d, e, f, g de la fi-

gure A sera homographique à celui de la figure A′ passant par les sept points respectifs a', b', c', d', e', f', g'.

Les deux courbes du troisième ordre de chaque plan ont déjà cinq points communs a, b, c, d, e et a', b', c', d', e'; comme elles se coupent en neuf points, il n'en reste que quatre pour la solution de la question. Or comme d'après M. Chasles il ne doit y avoir que trois solutions, il faut qu'il en existe encore une étrangère à la question.

THÉORÈME SEGMENTAIRE SUR LE TRIANGLE;

PAR M. MANHEIM,
Officier d'artillerie.

1°. Soit ABC un triangle rectiligne; par un point intérieur D, menons les droites DA, DB, DC et prolongeons chacune jusqu'au côté opposé; soient a, a' les deux segments formés en D sur la droite venant de A; de même b et b', c et c'. Si l'angle ADB est droit et si l'on mène par D une droite transversale MN perpendiculaire à CD, et soient α, α' les deux segments de cette transversale formés au point D, on aura

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)^2+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)^2=\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c'}\right)^2=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}\right)^2.$$

2°. Toute sphère tangente à la surface enveloppe d'une sphère tangente à deux plans et à une sphère donnée, touche cette surface suivant une circonférence ou la coupe suivant deux circonférences. Lorsque les deux plans sont parallèles, la surface enveloppe est un tore, et dans ce cas, lorsque la sphère tangente devient un plan, on a le théorème de M. Villarceau.

SUR LES QUESTIONS 301 ET 302

(voir t. XIV, p. 138);

PAR M. BRIOSCHI.

Soient

$$r = u = s = v = t = w = 0$$

les équations des côtés successifs d'un hexagone; en supposant que chaque point

a_1	soit déterminé par	$r = v = 0,$
a_2	—	$r = u = 0,$
a_3	—	$u = s = 0,$
a_4	—	$s = v = 0,$
$\vdots$		$\vdots$
a_9	—	$t = w = 0,$

et en choisissant convenablement les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, l'équation

$$\alpha rst + \beta uvt + \gamma rsw + \delta uvw = 0$$

représentera une ligne du troisième ordre qui passe par les neuf points $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9$.

L'équation d'une conique C_i menée par les points a_1, a_2, a_3, a_4, a_i sera

$$C_i = (uv)_i rs - (rs)_i uv = 0,$$

$(rs)_i$ étant la valeur de rs correspondante au point a_i, et $(uv)_i$ la valeur correspondante de uv. Mais si le point a_i est situé sur la ligne du troisième ordre, on aura identiquement

$$(rs)_i(\alpha t_i + \gamma w_i) + (uv)_i(\beta t_i + \delta w_i) = 0,$$

et, par conséquent,

$$C_i = (\alpha t_i + \gamma w_i) rs + (\beta t_i + \delta w_i) uv = 0.$$

Le rapport anharmonique des polaires d'un point quelconque relativement aux coniques C_5, C_6, C_7, C_8 sera donc

$$\varphi = \frac{(w_7 t_6 - w_6 t_7)(w_6 t_8 - w_8 t_6)}{(w_5 t_7 - w_7 t_5)(w_8 t_5 - w_5 t_8)};$$

w_i est la valeur de w en y mettant les coordonnées du point a_i et ainsi des autres, évidemment égal au rapport anharmonique du faisceau que l'on obtient en joignant par des droites le point a_9 aux points a_5, a_6, a_7, a_8. En effet, la droite $(a_9\, a_i)$ est représentée par l'équation

$$w_i t - t_i v = 0.$$

On sait que le lieu géométrique du point a_9, déterminé par la propriété d'être le centre d'un faisceau de droites menées par quatre points dont le rapport anharmonique est donné, est une conique sur laquelle sont situés les quatre points. Soit

$$\varphi(a_5\, a_6\, a_7\, a_8) = 0$$

l'équation de cette conique. Analoguement on aura une seconde conique

$$\psi(a_4\, a_6\, a_7\, a_8) = 0,$$

sur laquelle sera situé le point a_9.

Le point a_9 sera, par conséquent, le quatrième point d'intersection de ces deux coniques dont les trois autres sont a_6, a_7, a_8.

NOUVELLE SOLUTION SYNTHÉTIQUE DU PROBLÈME DE LA ROTATION DES CORPS;

Par M. P. SAINT-GUILHEM,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

1. Le problème dont il s'agit, et qui a pour objet la détermination du mouvement d'un corps de figure invariable autour d'un point fixe, est considéré par les géomètres comme un des plus importants et des plus difficiles de la mécanique rationnelle. Toutes les solutions de cette question, jusqu'à celle de M. Poinsot, avaient été déduites de l'analyse par des calculs plus ou moins compliqués, plus ou moins élégants.

Dans un Mémoire lu à l'Institut en 1834, l'illustre auteur de la *Théorie des couples* a exposé une solution synthétique, remarquable par les vues élevées et les considérations ingénieuses qu'elle renferme. Cette solution, présentée sous une forme très-simple et dépouillée de l'appareil des calculs, est entrée sans objection dans le domaine de la science où elle a tenu jusqu'à présent une haute place.

Aujourd'hui un de nos savants confrères à l'Académie de Toulouse, M. Gascheau, conteste, avec toute l'autorité que donnent de grandes lumières et un esprit rigoureux, la solidité d'un des principes fondamentaux sur lesquels elles reposent; il n'attribue qu'à une compensation d'erreurs l'exactitude des résultats auxquels elle conduit.

Nous partageons, après un examen réfléchi, l'opinion

de notre savant confrère ; l'assertion qu'il a émise, à laquelle nous avons d'abord refusé de croire, est, pour nous, maintenant parfaitement justifiée : une application très-simple, placée à la fin de ce Mémoire, met en évidence l'erreur (*) du principe auquel nous faisons allusion.

Nous nous proposons, dans le travail suivant, de présenter une solution synthétique nouvelle du problème de la rotation des corps; elle nous paraît ne rien laisser à désirer, tant pour la simplicité que pour la rigueur.

Définition.

2. Lorsqu'un point matériel soumis à des forces et à des liaisons quelconques est en mouvement, une force unique qui produirait le même effet que les forces et les liaisons sur ce point devenu libre, sera la *force totale* qui sollicite ce point. La résultante des forces qui sollicitent un point matériel, sans égard à l'effet des liaisons, sera la *force motrice*.

Une force fictive qui serait appliquée à un point matériel dans le sens de la vitesse, et qui aurait pour mesure le produit de sa masse par sa vitesse, sera la *quantité de mouvement* du point matériel.

La *résultante de plusieurs droites* sera la résultante des forces qui seraient représentées par ces droites.

Nous appellerons, avec Poisson, *axe du moment* d'une force, une droite menée par le centre des moments perpendiculairement au plan du moment de la force.

(*) L'erreur est de supposer que la force centripète d'un point matériel qui fait partie d'un corps doué d'un mouvement de rotation est proportionnelle à la distance de ce point à l'axe instantané ; elle est réellement proportionnelle à la distance de ce point au centre de courbure du petit arc qu'il décrit dans un instant.

Sa *direction* sera telle, qu'un spectateur qui aurait les pieds sur le plan et le dos appuyé contre l'axe, verrait la force dirigée autour de lui de sa gauche à sa droite.

Sa *grandeur* sera le moment de la force.

L'axe du moment résultant de plusieurs forces sera l'axe du moment de la résistance de ces forces, le centre des moments étant considéré comme fixe.

L'extrémité de l'axe du moment résultant de plusieurs forces sera le *pôle* de ces forces.

Un *milieu relatif* sera un espace indéfini, mobile, dont chaque point reste invariablement lié à tous les autres.

Trois axes ox, oy, oz seront dits *trois axes tournants* (*) lorsqu'ils seront disposés de manière qu'un spectateur qui aurait les pieds au point o et le dos appuyé contre l'axe oz, verrait l'axe ox à la gauche de l'axe oy. De cette manière, l'axe du moment d'une force située dans l'angle xoy, ou yoz, ou zox, et tendant à tourner autour du point o de ox vers oy, ou de oy vers oz, ou de oz vers ox, coïncidera avec l'axe oz, ou ox, ou oy.

Lorsqu'un corps tourne autour d'un point fixe, nous appellerons *caractéristique* du mouvement (**) l'axe du moment de la vitesse d'un point situé à la fois à l'unité de distance du point fixe et de l'axe instantané.

3. Cela posé, soient :

o le point fixe autour duquel un corps solide est assujetti à tourner;

ox, oy, oz trois axes rectangulaires tournants fixes dans le corps;

(*) Je dis trois axes tournants, comme on dit trois lettres tournantes en parlant des trois lettres x, y, z qui se succèdent circulairement.

(**) L'introduction de ce terme ou d'un terme analogue en mécanique nous paraît d'une très-grande utilité.

x, y, z les cordonnées par rapport à ces axes d'un point du corps dont la masse est m.

Soient d'ailleurs au bout du temps t,

Ω la caractéristique du mouvement de rotation;

p, q, r les projections de la droite Ω sur les axes ox, oy, oz;

G l'axe du moment résultant des quantités de mouvement des divers points du corps;

L, M, N les projections de la droite G sur les axes.

Propositions préliminaires.

4. Nous admettrons comme démontré que l'axe du moment résultant de plusieurs forces est la résultante des axes des moments de ces forces. A l'aide de ce théorème, nous démontrerons aisément les lemmes suivants :

Lemme I. *L'axe du moment résultant des forces totales est représenté à chaque instant en grandeur et en direction par la vitesse absolue du pôle des quantités de mouvement.*

En effet, la quantité de mouvement qui anime chaque point du corps au bout du temps $t + dt$, est la résultante de celle qui l'anime au bout du temps t et de celle qui lui est communiquée dans l'instant dt.

Donc l'axe du moment résultant des quantités de mouvement qui animent les divers points du corps au bout du temps $t + dt$ est la résultante de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement qui animent ces points au bout du temps t et de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement qui leur sont communiquées dans l'instant dt.

Donc, si G′, G, g désignent ces trois axes, G′ sera la diagonale du parallélogramme construit sur les deux

droites G et g ; donc g sera représenté en grandeur et en direction par la droite qui va de l'extrémité de G à l'extrémité de G'.

Or cette droite, agrandie dans le rapport de 1 à dt, représente la vitesse de l'extrémité de l'axe G.

Donc cette droite, agrandie dans le rapport de 1 à dt, représente en grandeur et en direction la vitesse du pôle des quantités de mouvement.

D'un autre côté, si la quantité de mouvement communiquée en chaque point dans l'instant dt est agrandie dans le rapport de 1 à dt, elle représentera la force totale en ce point ; donc g, agrandi dans le rapport de 1 à dt, représente aussi l'axe du moment résultant des forces totales ; donc, etc.

5. Lemme II. *Si l'on applique à un point quelconque du corps une droite égale, parallèle et contraire à la caractéristique, l'axe du moment de cette droite représentera en grandeur et en direction la vitesse du point dont il s'agit.*

En effet, soient m le point dont il s'agit, v une droite qui représente en grandeur et en direction sa vitesse, ρ sa distance à l'axe instantané, Ω' une droite appliquée au point m, égale, parallèle et contraire à la caractéristique Ω (*) ; V l'axe du moment de cette droite, on aura évidemment

$$V = \rho . \Omega' = v.$$

D'ailleurs les droites V et v étant l'une et l'autre perpendiculaires au plan qui passe par le point m et par l'axe instantané, sont parallèles ; elles sont dirigées dans le même sens, car la droite Ω' doit être dirigée de gauche à droite autour de l'axe V, comme v l'est autour de la

(*) Le bras du moment Ω est l'unité. Ce moment est le même que la vitesse à l'unité de distance de l'axe. Tm.

caractéristique ; or cela ne peut avoir lieu qu'autant que V et v sont dirigés dans le même sens ; donc, etc.

6. Problème I. *Déterminer les projections de l'axe du moment d'une force* P *sur les trois axes coordonnés.*

Soient m le point d'application de la force P ; x, y, z ses coordonnées, X, Y, Z les composantes de la force P parallèles aux x, y, z.

On démontre aisément par la géométrie (en décomposant la force P en trois autres perpendiculaires aux axes) que la force P peut toujours être remplacée par ses projections sur trois plans rectangulaires et par une quatrième force égale, parallèle et contraire à la force P appliquée à l'origine.

De là il suit que l'axe du moment de la force P, estimé successivement suivant les axes des x, y, z, a pour expression

$$Zy - zY, \quad Xz - xZ, \quad Yx - Xy,$$

car il coïncide successivement avec l'axe du moment résultant des projections des trois forces X, Y, Z sur chacun des plans coordonnés yz, zx, xy ; et cet axe a pour expression les quantités ci-dessus, pourvu que l'on regarde les axes des moments qui coïncident avec les axes coordonnés comme positifs ou négatifs, suivant qu'ils sont portés du côté positif ou négatif de ces derniers axes.

7. Problème II. *Déterminer l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.*

Appliquons à chaque point m une droite Ω' égale, parallèle et contraire à la caractéristique, l'axe du moment de cette droite sera (lemme II) égal et parallèle à la vitesse du point m ; or la projection de la droite Ω' sur les axes ox, oy, oz étant $-p$, $-q$, $-r$, l'axe du moment de la droite Ω' aura pour projection les quantités $qz-ry$,

$rx - pz$, $py - qx$; par conséquent, l'axe du moment de la quantité de mouvement du point m aura pour projections, la masse de ce point étant m,

$$m[(py - qx)y - (rx - pz)z],$$
$$m[(qz - ry)z - (py - qx)x],$$
$$m[(rx - pz)x - (qz - ry)y];$$

par suite, si nous posons, comme à l'ordinaire,

$$\Sigma m(y^2 + z^2) = A, \quad \Sigma m(z^2 + x^2) = B, \quad \Sigma m(x^2 + y^2) = C,$$
$$\Sigma myz = D, \quad \Sigma mzx = E, \quad \Sigma mxy = F.$$

Le signe de sommation Σ s'étendant à tous les points du corps, l'axe du moment résultant des quantités de mouvement aura pour projections

$$(1) \quad \begin{cases} L = Ap - Fq - Er, \\ M = Bq - Dr - Fp, \\ N = Cr - Ep - Dq. \end{cases}$$

Ces projections déterminent à chaque instant la grandeur et la direction de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.

8. Problème III. *Déterminer la vitesse du point du corps qui coïncide avec le pôle des quantités de mouvement.*

Soit π le pôle des quantités de mouvement; appliquons à ce point une droite Ω' égale, parallèle et contraire à la droite Ω, caractéristique du mouvement, l'axe du moment de la droite Ω' sera, lemme II, égal et parallèle à la vitesse du point π; or les projections de la droite Ω' sur les axes ox, oy, oz étant respectivement $-p$, $-q$, $-r$, et les coordonnées du point π sur les mêmes axes étant L, M, N, les projections de la vitesse du point π seront respectivement, d'après les formules du pro-

blème I,

$$Nq - Mr, \quad Lr - Np, \quad Mp - Lq;$$

ces projections font connaître à chaque instant la vitesse dont il s'agit (*).

9. Problème IV. *Déterminer la vitesse du pôle des quantités de mouvement dans l'intérieur du corps, c'est-à-dire par rapport aux axes* ox, oy, oz.

L, M, N étant les coordonnées du pôle des quantités de mouvement par rapport aux axes ox, oy, oz, les projections de la vitesse de ce point sur ces axes sont respectivement

$$\frac{dL}{dt}, \quad \frac{dM}{dt}, \quad \frac{dN}{dt};$$

ces projections font connaître à chaque instant la vitesse dont il s'agit.

Équations du mouvement.

10. Si l'on applique à chaque point du corps une force égale et contraire à la force totale qui le sollicite, il est évident que les forces auxquelles le corps sera soumis se feront équilibre, conformément au principe de d'Alem-

---

(*) Nous avions démontré dans un précédent Mémoire, en partageant l'erreur de M. Poinsot, que la vitesse dont il s'agit représente en grandeur et en direction l'axe du moment résultant des forces centripètes. Ce théorème n'a plus lieu; mais on peut le remplacer évidemment par le suivant: *La vitesse du point du corps qui coïncide avec le pôle des quantités de mouvement représente en grandeur et en direction l'axe du moment résultant des forces centripètes, l'axe instantané étant tout à coup rendu fixe.* Ainsi modifié, ce théorème donne encore une interprétation de l'un des termes de chacune des équations d'Euler.

Si l'on regarde la force totale comme la résultante de la force centripète que nous venons de considérer et d'une autre force, il est visible que cette autre force ne sera pas généralement dans le plan qui passe par la force totale et par la force centripète réelle.

bert ; donc l'axe du moment résultant des forces motrices coïncide en grandeur et en direction avec l'axe du moment résultant des forces totales, ou, d'après le lemme I, avec la vitesse absolue du pôle des quantités de mouvement.

Or la vitesse absolue d'un point situé dans un milieu relatif est évidemment la résultante de la vitesse de ce point dans le milieu relatif, et de la vitesse du même point considéré comme un point du milieu relatif; donc l'axe du moment résultant des forces motrices coïncidera en grandeur et en direction avec la résultante de la vitesse du pôle des quantités de mouvement dans l'intérieur du corps et de la vitesse du même point considéré comme un point du corps.

Traduisons cette relation en nombres :

Si l'on désigne par P, Q, R les projections de l'axe du moment résultant des forces motrices sur les axes ox, oy, oz, on aura, d'après les formules des préliminaires,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{dL}{dt} + Nq - Mr, \\ Q &= \frac{dM}{dt} + Lr - Np, \\ R &= \frac{dN}{dt} + Mp - Lq. \end{aligned}\right.$$

Ces équations coïncident avec les équations d'Euler lorsque l'on prend pour axes coordonnés les axes principaux du corps.

Elles déterminent, avec les équations (1), les vitesses angulaires du corps à une époque quelconque autour des trois axes ox, oy, oz; il reste à trouver la position des axes mobiles ox, oy, oz par rapport à trois axes rectangulaires ox', oy', oz' fixes dans l'espace. A cet effet, remarquons que le corps tournant autour de l'axe instan-

tané avec une vitesse angulaire égale à Ω pendant l'instant dt occupe à la fin de cet instant, par rapport à l'un quelconque des axes ox', oy', oz' la même position que si le corps était resté fixe et que l'axe considéré eût tourné autour de l'axe instantané pendant l'instant dt avec une vitesse angulaire égale et contraire à celle qu'avait le corps autour de l'axe instantané.

Donc, si l'on prend sur l'un des axes ox', oy', oz' un point m_1 et qu'on applique en ce point une droite Ω_1 égale et parallèle à la droite Ω, l'axe du moment de cette droite sera égal et parallèle à la vitesse du point m_1; donc, si l'on appelle x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point m_1 par rapport aux axes ox, oy, oz, on aura, en observant que la droite Ω_1 a pour projection sur les axes p, q, r,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= ry_1 - qz_1, \\ \frac{dy_1}{dt} &= pz_1 - rx_1, \\ \frac{dz_1}{dt} &= qx_1 - py_1. \end{aligned}\right.$$

Au moyen de ces relations, on aura la position de l'un quelconque des axes ox_1, oy_1, oz_1 par rapport aux axes ox, oy, oz, et, par conséquent, la position de chacun de ceux-ci par rapport aux axes fixes dans l'espace (*).

Note.

M. Poinsot suppose, dans sa *Théorie nouvelle de la Rotation*, que lorsqu'un corps tourne autour d'un point fixe, la force centripète est toujours proportionnelle à la distance de ce point à l'axe instantané, et, par conséquent, que cette distance est toujours égale au rayon de courbure de l'arc décrit par ce point en un instant. Le

(*) *Voir* Sturm, *Nouvelles Annales*, t. X, p. 419. Tm.

problème suivant met en évidence l'inexactitude de cette hypothèse.

Problème. *Un cercle dont le centre est fixe et dont le plan est vertical, tourne à la fois autour de son diamètre vertical et autour de son centre dans son plan. Les vitesses angulaires de ces deux rotations sont toujours égales entre elles; on demande de déterminer : 1° la trajectoire de l'un des points de la circonférence du cercle mobile; 2° la longueur de la perpendiculaire abaissée d'une position quelconque du point générateur sur l'axe instantané correspondant; 3° le rayon de courbure de la trajectoire correspondant au même point.*

Soient :

m le point générateur de la trajectoire, point que nous supposerons, pour plus de simplicité, distant du point fixe d'une quantité égale à l'unité;

om le rayon vecteur mené du point fixe au point m;

ox, oy, oz trois axes rectangulaires tels, que l'axe oz coïncide avec om lorsque ce rayon est dirigé verticalement de bas en haut; que l'axe ox coïncide avec la position qu'aurait eue le rayon om après avoir décrit un angle de 90 degrés si le plan du cercle était resté immobile; que l'axe oy coïncide avec la position qu'occupe réellement le rayon om à la même époque;

x, y, z les coordonnées du point m à une époque quelconque;

φ l'angle que le rayon vecteur om fait avec l'axe oz, angle toujours égal à celui que la projection de om sur le plan des xy fait avec l'axe des x.

Au moyen de ces notations, on trouve immédiatement les relations suivantes :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \sin\varphi \cos\varphi, \\ y = \sin^2\varphi, \\ z = \cos\varphi. \end{cases}$$

De là on déduit d'abord

$$(2) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 - y = 0. \end{cases}$$

Ces équations montrent que la trajectoire est l'intersection de la sphère décrite par la circonférence du cercle mobile avec un cylindre droit vertical tangent au plan de ce cercle dans sa position initiale et ayant pour base un cercle dont la diamètre est le rayon du cercle mobile.

Cherchons, en second lieu, la longueur de la perpendiculaire abaissée du point m sur l'axe instantané correspondant.

Pour avoir la position de l'axe instantané à une époque quelconque, il suffit de construire la diagonale du parallélogramme dont les côtés contigus sont les caractéristiques des deux mouvements de rotation à cette époque. Ces caractéristiques sont, d'après l'énoncé, égales entre elles; l'une coïncide toujours avec l'axe oz, l'autre est toujours dans un plan perpendiculaire au cercle mobile; donc l'axe instantané fait un angle de 45 degrés avec l'axe des z et reste toujours dans un plan vertical perpendiculaire au plan du cercle mobile.

D'après cela, si l'on désigne par h la perpendiculaire dont il s'agit, on trouvera sans peine

$$h^2 = \sin^2\varphi + \frac{1}{2}\cos^2\varphi,$$

d'où

(3) $$h = \sqrt{\frac{1 + \sin^2 \varphi}{2}}.$$

Cherchons enfin le rayon de courbure de la trajectoire au point m; si nous désignons ce rayon par ρ, et par s l'arc de la trajectoire compris entre le point m et l'axe des z, on aura

(4) $$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2 x)^2 + (d^2 y)^2 + (d^2 z)^2 - (d^2 s)^2}}.$$

Or on déduit des équations (1):

$$\frac{dx}{d\varphi} = \cos 2\varphi, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \sin 2\varphi,$$
$$\frac{dz}{d\varphi} = -\sin\varphi, \qquad \frac{ds^2}{d\varphi^2} = 1 + \sin^2\varphi,$$
$$\frac{d^2 x}{d\varphi^2} = -2\sin 2\varphi, \qquad \frac{d^2 y}{d\varphi^2} = 2\cos 2\varphi,$$
$$\frac{d^2 z}{d\varphi^2} = -\cos\varphi, \qquad \frac{ds\, d^2 s}{d\varphi^3} = \sin\varphi\cos\varphi.$$

Au moyen de ces valeurs, la formule (4) devient

(5) $$\rho = \sqrt{\frac{(1 + \sin^2\varphi)^3}{5 + 3\sin^2\varphi}}.$$

Pour que le rayon de courbure de la trajectoire au point m soit égal, comme le suppose M. Poinsot, à la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe instantané correspondant, il faut que l'on ait, quel que soit φ,

$$\frac{(1 + \sin^2\varphi)^2}{5 + 3\sin^2\varphi} = \frac{1}{2}.$$

Or cette équation n'est satisfaite que par les valeurs

$$\varphi = 90^\circ (1 \pm 2n);$$

n étant un nombre entier quelconque, ces valeurs correspondent au point unique où la trajectoire vient couper le plan des xy.

Ainsi la solution du problème de la rotation des corps par M. Poinsot est inacceptable.

Note du Rédacteur. Il faut se rappeler que tout couple est représenté en *grandeur* et en *direction* par son axe, de sorte que l'axe représente une force; de là l'expression de l'auteur résultante des *axes*. Il n'emploie pas le mot *couple* et le remplace par le mot *moment;* il semble que cette substitution n'est pas favorable à la clarté, mais ne nuit pas à la justesse des raisonnements. L'erreur signalée provient de ce que les vitesses dépendent d'infiniment petits du premier ordre, tels sont les contacts des tangentes; tandis que les forces accélératrices, et, par conséquent, les forces centripètes dépendent d'infiniment petits du second ordre, tels sont les contacts des cercles de courbures.

SUR UNE QUESTION D'ALGÈBRE RELATIVE A DEUX ÉQUATIONS CUBIQUES;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

Étant données deux équations du troisième degré, savoir

(I) $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ (racines α, α', α''),

(II) $x^3 - p'x^2 + q'x - r' = 0$ (racines β, β', β''),

je vais discuter l'équation dont les racines sont les valeurs que prend la fonction

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta''.$$

Désignons cette fonction par z et posons

$$M = p^2 q' + p'^2 q - 3 q q',$$

$$N = 2(p^3 r' + p'^3 r) - q(pqr' + p' q' r) + pp' qq' + 27 rr',$$

$$\Delta = 27 r^2 + 4q^3 - 18 pqr + 4p^3 r - p^2 q^2,$$

$$\Delta' = 27 r'^3 + 4 q'^3 - 18 p' q' r' + 4 p'^3 r' - p'^2 q'^2$$

(Δ, Δ' sont les fonctions qu'on appelle aujourd'hui *discriminants* des équations données, et la condition $\Delta = 0$ exprime que l'équation (I) a deux racines égales) : l'équation dont il s'agit s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{(III)} \qquad \left(z^3 - pp' z^2 + Mz - \frac{1}{2} N\right)^2 - \frac{1}{4} \Delta\Delta' = 0.$$

Si l'équation (I) a deux racines égales, l'équation (III) a ses racines égales deux à deux, ce qui se vérifie aisément à priori; et si les équations données deviennent identiques, Δ égale Δ', et l'équation (III) se décompose dans les suivantes :

$$z^3 - p^2 z^2 + Mz - \frac{1}{2}(N + \Delta) = 0,$$

$$z^3 - p^2 z^2 + Mz - \frac{1}{2}(N - \Delta) = 0.$$

Les racines de la première sont

$$\alpha^2 + 2\alpha' \alpha'', \quad \alpha'^2 + 2\alpha\alpha'', \quad \alpha''^2 + 2\alpha\alpha',$$

ce qu'on peut faire voir en éliminant x entre l'équation (I) et la suivante :

$$x^3 - xz + 2r = 0.$$

Les racines de la seconde sont évidemment q deux fois et $p^2 - 2q$.

Nous tirons aussi par différentiation

$$\frac{d\Delta}{dr}\cdot\frac{d\Delta'}{dr'} = 4\,(27\,\mathrm{N} - 18\,\mathrm{M}\,pp' + 4p^3\,p'^3),$$

et en représentant par Δ'' le discriminant de l'équation

$$(\mathrm{IV}) \qquad z^3 - \mathrm{PP'}\,z^2 + \mathrm{M}z - \frac{1}{2}\,\mathrm{N} = 0,$$

nous avons

$$8\,\frac{d\Delta''}{d\mathrm{N}} = \frac{d\Delta}{dr}\cdot\frac{d\Delta'}{dr'},$$

ce qui exprime une relation entre les racines des dérivées des équations (I), (II), (IV).

En posant

$$z - \frac{pp'}{3} = u,$$

l'équation (III) se transforme en

$$\left\{\begin{array}{l} u^3 - \dfrac{u}{3}\,(p^2 - 3q)(p'^2 - 3q') \\ \qquad - \dfrac{1}{216}\,\dfrac{d\Delta}{dr}\cdot\dfrac{d\Delta'}{dr'} \end{array}\right\}^2 - \frac{1}{4}\,\Delta\Delta' = 0\,;$$

d'où nous tirons

$$27\,\Delta'' = \left(\frac{1}{64}\,\frac{d\Delta}{dr}\cdot\frac{d\Delta'}{dr'}\right)^2 - 4\,(p^2 - 3q)^3\,(p'^2 - 3q')^3\,;$$

mais on a

$$\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)^2 - 108\,\Delta = 16\,(p^2 - 3q)^2 :$$

en sorte que

$$\Delta'' = \frac{1}{16}\left\{\Delta\left(\frac{d\Delta'}{dr'}\right)^2 + \Delta'\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)^2 - 108\,\Delta\Delta'\right\}.$$

Posons maintenant

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta'' \\ 1 & \alpha'' & \beta' \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta' \\ 1 & \alpha' & \beta'' \\ 1 & \alpha'' & \beta \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta' \\ 1 & \alpha' & \beta \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}, \quad D_5 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta'' \\ 1 & \alpha' & \beta \\ 1 & \alpha'' & \beta' \end{vmatrix}, \quad D_6 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta'' \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta \end{vmatrix},$$

le produit P de ces six déterminants s'exprime d'une manière assez élégante. En effet, nous trouvons

$$16 P = \Delta \left(\frac{d\Delta'}{dr'}\right)^2 - \Delta' \left(\frac{d\Delta}{dr}\right)^2,$$

ou bien encore

$$P = \Delta\,(p'^2 - 3\,q')^3 - \Delta'\,(p^2 - 3\,q)^3.$$

Si l'équation (III) n'a que deux racines égales, on a

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \left(\frac{p^2 - 3\,q}{p'^2 - 3\,q'}\right)^3.$$

Note du Rédacteur. Les six racines de l'équation (III) sont

$$\begin{aligned} &\alpha\beta + \alpha'\,\beta' + \alpha''\,\beta'', \\ &\alpha\beta + \alpha'\,\beta'' + \alpha''\,\beta', \\ &\alpha\beta' + \alpha'\,\beta + \alpha''\,\beta'', \\ &\alpha\beta' + \alpha'\,\beta'' + \alpha''\,\beta, \\ &\alpha\beta'' + \alpha'\,\beta + \alpha''\,\beta', \\ &\alpha\beta'' + \alpha'\,\beta' + \alpha''\,\beta, \end{aligned}$$

et l'équation (III) s'obtient par la théorie des fonctions symétriques. Cette équation peut toujours se ramener au troisième degré, car on a

$$z^3 - pp'\,z^2 + Mz - \frac{1}{2}N \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta\Delta'} = 0.$$

Si

$$r = r' = 0,$$

on peut supposer

$$\alpha = \beta = 0;$$

l'équation (III) est alors relative à deux équations du second degré, et en supposant p, q, r des fonctions d'une variable y, on est amené à des propriétés géométriques des courbes du second et du troisième degré.

EXERCICES
sur la résolution numérique des équations algébriques ;
D'APRÈS GAUSS.

Met. nova. integr. comm. Gotting. vol. II, 1814-15, pages 72.

1. $x^2 - x + \frac{1}{6} = 0.$

$$x_1 = 0,2113248654\,051871,$$
$$x_2 = 0,7886751345\,948129.$$

2. $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20} = 0.$

$$x_1 = 0,1127016653\,792583,$$
$$x_2 = 0,5,$$
$$x_3 = 0,8872983346\,207417.$$

3. $x^4 - 2x^3 + \frac{9}{7}x^2 - \frac{2}{7}x + \frac{1}{70} = 0.$

$$x_1 = 0,0694318442\,029754,$$
$$x_2 = 0,3300094782\,075677,$$
$$x_3 = 0,6699905217\,924323,$$
$$x_4 = 0,9305681557\,970246.$$

4. $x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{20}{9}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{5}{42}x - \frac{1}{252} = 0.$

$$x_1 = 0{,}0469100770\ 306680,$$
$$x_2 = 0{,}2307653449\ 471585,$$
$$x_3 = 0{,}05,$$
$$x_4 = 0{,}7692346550\ 528415,$$
$$x_5 = 0{,}9530899229\ 693320.$$

5. $x^6 - 3x^5 + \frac{75}{22}x^4 - \frac{20}{11}x^3 + \frac{5}{11}x^2 - \frac{1}{22}x + \frac{1}{924} = 0.$

$$x_1 = 0{,}0337652428\ 984240,$$
$$x_2 = 0{,}1693953067\ 668678,$$
$$x_3 = 0{,}3806904069\ 584015,$$
$$x_4 = 0{,}6193095930\ 415985,$$
$$x_5 = 0{,}8306046932\ 331322,$$
$$x_6 = 0{,}9662347571\ 015760.$$

6. $x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{63}{13}x^5 - \frac{175}{52}x^4 + \frac{175}{143}x^3 - \frac{63}{286}x^2$

$+ \frac{7}{429}x - \frac{1}{3432} = 0.$

$$x_1 = 0{,}0254460438\ 286202,$$
$$x_2 = 0{,}1292344072\ 003028,$$
$$x_3 = 0{,}2970774243\ 113015,$$
$$x_4 = 0{,}5,$$
$$x_5 = 0{,}7029225756\ 886985,$$
$$x_6 = 0{,}8707655927\ 996972,$$
$$x_7 = 0{,}9745539561\ 713798.$$

(Voir *Nouvelles Annales*, t. XII, p. 319.)

Remarque. Nous donnerons l'analyse du Mémoire.

SUR LE CALCUL DE π;

PAR M. J.-CH. DUPAIN,
Professeur.

Permettez-moi quelques observations au sujet d'une Note insérée dans les *Nouvelles Annales*, tome XIV, p. 462.

1°. Legendre traitant le même sujet (*Géométrie*, livre IV, prop. XIII) emploie des formules qui diffèrent de celles de M. Schlomilch,

$$A' = \sqrt{A.B},$$

$$B' = \frac{2\,A.B}{A + A'}.$$

A et B sont les surfaces de deux polygones réguliers l'un inscrit, l'autre circonscrit, A' et B' sont les surfaces des polygones d'un nombre double de côtés.

En adoptant cette notation, M. Schlomilch écrirait

$$A' = \sqrt{A.B}, \quad B' = \frac{2\,A'.B}{A' + B}.$$

Ces formules peuvent se déduire de celles de Legendre. En effet

$$A = \frac{A'^2}{B},$$

$$B' = \frac{2\,A'^2\,B}{AB + A'\,B},$$

$$B' = \frac{2\,A'^2\,B}{A'^2 + A'\,B};$$

je supprime le facteur commun A′ et j'ai

$$B' = \frac{2A'B}{A' + B}.$$

2°. Appelons P_n, p_n les périmètres de deux polygones réguliers de n côtés, l'un circonscrit, l'autre inscrit à un cercle. On a les formules

$$P_{2n} = \frac{2P_n p_n}{P_n + p_n}, \quad p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{1}{P_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_n} + \frac{1}{p_n}\right), \quad \frac{1}{p^2_n} = \sqrt{\frac{1}{p_n}\frac{1}{P_{2n}}}.$$

On est conduit aux mêmes calculs que M. Schlomilch, et ces calculs ne paraissent pas différer essentiellement de ceux de Schwab.

3°. Si l'on forme une série de termes commençant par a, b et telle, que chaque terme soit moyen arithmétique entre les deux précédents, le terme général de la série est

$$\frac{a + 2b}{3} - (-1)^n \frac{a - b}{3 \cdot 2^n},$$

ce que l'on démontre aisément en admettant que deux termes consécutifs aient cette forme et en calculant le terme suivant.

Ce terme général a évidemment pour limite $\frac{a + 2b}{3}$.

4°. La méthode de Schwab est généralement adoptée pour le calcul élémentaire mais *sérieux* du nombre π.

Quand il s'agit d'indiquer rapidement à des élèves la possibilité de ce calcul, ne pourrait-on employer la marche suivante ?

(On est prié de tracer la figure.)

Dans un cercle dont le diamètre est 2 et dont la surface sera π, je trace deux rayons perpendiculaires OA, OC. Je divise en cinq parties égales la moitié OE de OA et aux points de division j'élève des ordonnées ou demi-cordes perpendiculaires sur OA, savoir ED, ff', gg', hh', ll'. Ces ordonnées sont moyennes proportionnelles entre les segments qu'elles interceptent sur le diamètre :

$$ff' = \sqrt{0,6 \times 1,4} = \sqrt{0,84} = 0,92,$$

$$gg' = \sqrt{0,7 \times 1,3} = \sqrt{0,91} = 0,95,$$

$$hh' = \sqrt{0,8 \times 1,2} = \sqrt{0,96} = 0,98,$$

$$ll' = \sqrt{0,9 \times 0,1} = \sqrt{0,99} - 1,00.$$

ED est la moitié du côté du triangle équilatéral inscrit

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,86.$$

L'aire COED a pour valeur approchée

$$0,1\left(\frac{1}{2}\text{DE} + ff' + gh' + hh' + ll' + \frac{1}{2}\text{OC}\right) = 0,478.$$

Le triangle ODE a pour mesure

$$\frac{1}{2}\text{OE} \times \text{DE} = \frac{\sqrt{3}}{8} = 0,216.$$

Le secteur COD étant la différence entre COED et COE, on a

$$\text{aire COD} = 0,478 - 0,216 = 0,262$$

Ce secteur est d'ailleurs la douzième partie du cercle ; donc

$$\pi = 12 \times 0,262 = 3,144.$$

Cette valeur est approchée à moins d'un centième, mais on ne pourrait l'affirmer à priori.

Si l'on voulait être sûr que l'erreur commise est plus petite que ε, il faudrait que le nombre de divisions de OE fût plus grand que

$$\frac{2-\sqrt{3}}{8\varepsilon},$$

et l'on serait conduit à des calculs plus longs que ceux de Schwab.

5°. Un auteur connu par de nombreuses publications vient d'insérer dans sa *Géométrie* une Note d'un professeur du lycée Bonaparte.

Ce professeur calcule le nombre π au moyen des périmètres des polygones inscrits seulement et avec les Tables de Lalande (*Sic visum Superis*). On trouve ainsi :

Pour 64 côtés....	3,1394
Pour 128 côtés....	3,119

L'approximation diminue quand le nombre des côtés augmente. M. le Professeur se garde bien d'avouer ce fait, dans la crainte fondée d'effaroucher les élèves; mais a-t-il raison de le déguiser en disant que le périmètre du polygone de 128 côtés est aussi 3,1394? N'a-t-il pas à redouter la censure de ce juge sévère qui accuse les anciens auteurs (tels que M. Blanchet) de ne pas appliquer *franchement* la méthode des limites, par ce seul fait qu'ils emploient les polygones circonscrits.

Note du Rédacteur. M. Saigey vient de publier une méthode de calculer π, qui, conséquence de la méthode de Thomas Simpson, donne la même approximation. Nous reviendrons sur cette méthode, d'une élégance et d'une simplicité remarquables. On la trouve dans un ouvrage intitulé : *Géométrie élémentaire*, par M. Saigey; 1856, in-12

de 252 pages (*). Géométrie curieuse. On y trouve des proportions sans rapport et le célèbre axiome XI d'Euclide, qui a résisté pendant des milliers d'années aux efforts de tous les géomètres, y est démontré avec une rapidité électrique, à l'aide d'un mouvement d'éventail. C'est très-gracieux.

NOTE SUR QUELQUES IDENTITÉS;

PAR M. E. PROUHET.

Je me propose de démontrer quelques identités curieuses énoncées sans démonstration par M. Oscar Weber, professeur à Dresde (*Archives de Grunert*, t. XXXII, p. 853; 1854).

Afin d'éviter une trop grande complication, je prendrai un exemple particulier, mais on verra sans peine que le même raisonnement convient à tous les cas.

Soient a, b, c, d, e, f six quantités inégales et que nous supposerons racines de l'équation

$$x^6 + P_1 x^5 + P_2 x^4 + P_3 x^3 + P_4 x^2 + P_5 x + P_6 = 0.$$

Considérons le tableau formé des diverses puissances de ces quantités

$$\begin{matrix} a^6 & a^5 & a^4 & a^3 & a^2 & a & a^0 \\ b^6 & b^5 & b^4 & b^3 & b^2 & b & b^0 \\ c^6 & c^5 & c^4 & c^3 & c^2 & c & c^0 \\ d^6 & d^5 & d^4 & d^3 & d^2 & d & d^0 \\ e^6 & e^5 & e^4 & e^3 & e^2 & e & e^0 \\ f^6 & f^5 & f^4 & f^3 & f^2 & f & f^0 \end{matrix}$$

(*) Chez Mallet-Bachelier, quai des Augustins, 55. Prix: $3^f\ 50^c$.

Ce tableau renferme quarante-deux termes, de sorte que si l'on enlève une des colonnes verticales, il restera trente-six quantités avec lesquelles on pourra former un déterminant. Je nomme D le déterminant que l'on obtient après avoir supprimé la première colonne à gauche, D_1 celui qu'on obtient en supprimant la seconde, et ainsi de suite.

D'après un théorème de Vandermonde (*A. S.*, 1772, 2[e] partie, p. 522), on a

$$D = (a - b)(a - c)\ldots(a - f)(b - c)\ldots(b - f)\ldots(e - f).$$

D'après un second théorème du même géomètre (*Ibid*, p. 254), on a

$$D_1 = \sum a^6 \times \begin{bmatrix} b^4 & b^3 & b^2 & b & b^0 \\ c^4 & c^3 & c^2 & c & c^0 \\ d^4 & d^3 & d^2 & d & d^0 \\ e^4 & e^3 & e^2 & e & e^0 \\ f^4 & f^3 & f^2 & f & f^0 \end{bmatrix}.$$

Les déterminants compris sous le signe $\sum$ ont tantôt le signe +, tantôt le signe —. Cette particularité n'ayant aucune importance pour l'objet que j'ai en vue, je me contenterai de remarquer que le terme exprimé a le signe +.

D'après le premier théorème de Vandermonde, on peut encore écrire

$$D_1 = \sum a^6 (b - c)(b - d)\ldots(b - f)\ldots(e - f),$$

on aura ensuite

$$D_2 = \sum \begin{bmatrix} a^6 & a^5 \\ b^6 & b^5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c^3 & c^2 & c & c^0 \\ d^3 & d^2 & d & d^0 \\ e^3 & e^2 & e & e^0 \\ f^3 & f^2 & f & f^0 \end{bmatrix},$$

et, par conséquent,

$$D_2 = \sum a^5 b^5 (a-b)(c-d)(c-e)(c-f)\ldots(e-f);$$

on aura aussi

$$D_3 = \sum \begin{bmatrix} a^6 & a^5 & a^4 \\ b^6 & b^5 & b^4 \\ c^6 & c^5 & c^4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d^2 & d & d^0 \\ e^2 & e & e^0 \\ f^2 & f & f^0 \end{bmatrix}$$

ou bien

$$D_3 = \sum a^4 b^4 c^4 (a-b)(a-c)(b-c)(d-e)(d-f)(e-f),$$

et ainsi de suite.

Ces préliminaires admis, soit à résoudre le système des équations suivantes :

$$P_1 a^5 + P_2 a^4 + P_3 a^3 + P_4 a^2 + P_5 a + P_6 = - a^6,$$
$$P_1 b^5 + P_2 b^4 + P_3 b^3 + P_4 b^2 + P_5 b + P_6 = - b^6,$$
. . . .
$$P_1 f^5 + P_2 f^4 + P_3 f^3 + P_4 f^2 + P_5 f + P_6 = - f^6,$$

où l'on considère P_1, P_2, etc., comme des inconnues. Le dénominateur commun de ces inconnues sera D : le numérateur de la valeur de P_1 sera le déterminant D_1 dans lequel on aurait changé de signe tous les termes de la première colonne. On aura donc

$$P_1 = -\frac{D_1}{D},$$

ou, en substituant les valeurs de D et de D_1 trouvées plus haut et réduisant,

$$(1)\quad a+b+c+\ldots+f = \sum \frac{a^6}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(a-f)}.$$

Le numérateur de P_2 sera le déterminant D_2 dans lequel on aurait transporté la première colonne à la seconde place en changeant les signes de tous ses termes, ce qui n'altère pas la valeur de ce déterminant.

On aura donc

$$P_2 = \frac{D_2}{D},$$

ou, en réduisant,

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} ab + ac + \ldots + ef \\ = \sum \dfrac{a^5 b^5}{(a-c)(a-d)\ldots(a-f)(b-c)\ldots(b-f)}. \end{array} \right.$$

On aura de même

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} abc + abd + \ldots + def \\ = \sum \dfrac{a^4 b^4 c^4}{(a-d)(a-e)(a-f)(b-d)\ldots(c-f)}, \end{array} \right.$$

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{l} abcd + abce + \ldots + cdef \\ = \sum \dfrac{a^3 b^3 c^3 d^3}{(a-e)(a-f)(b-e)(b-f)\ldots(d-f)}, \end{array} \right.$$

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} abcde + \ldots + bcdef \\ = \sum \dfrac{a^2 b^2 c^2 d^2 e^2}{(a-f)(b-f)(c-f)(d-f)(e-f)}. \end{array} \right.$$

Les formules (1), (2),..., (5) sont celles de M. Weber. On peut les renfermer dans le théorème suivant :

Si

$$a,\quad b,\quad c, \ldots,\quad f, g, \ldots,\quad l$$

sont m *quantités inégales et racines de l'équation*

$$f(x) = 0,$$

la somme des produits de ces racines prises n *à* n *sera*

égale à

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum \frac{(abc\ldots fg)^{m-n+1} (a-b)^2 (a-c)^2 \ldots (f-g)^2}{f'(a)\, f'(b) \ldots f'(g)}.$$

Un peu d'attention suffira pour voir que cet énoncé comprend toutes les formules particulières que nous venons de démontrer.

Note du Rédacteur. Ces identités sont d'utiles exercices de calcul à donner aux élèves ; développons-en quelques-unes :

$$a+b=\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-a},$$

$$a+b+c=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)},$$

$$a+b+c+d=\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)},$$

etc. ;

$$ab+ac+bc=\frac{a^2 b^2}{(a-c)(b-c)} + \frac{a^2 c^2}{(a-b)(c-b)} + \frac{b^2 c^2}{(b-a)(c-a)},$$

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = \frac{a^3 b^3}{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}$$
$$+ \frac{a^3 c^3}{(a-b)(a-d)(c-b)(c-d)}$$
$$+ \frac{a^3 d^3}{(a-b)(a-c)(d-b)(d-c)}$$

etc.;

$$abc + abd + acd + bcd = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a-d)(b-d)(c-d)}$$
$$+ \frac{a^2 b^2 d^2}{(a-c)(b-c)(d-c)}$$
$$+ \frac{a^2 c^2 d^2}{(a-c)(c-b)(c-d)}$$
$$+ \frac{b^2 c^2 d^2}{(b-a)(c-a)(d-a)}$$

etc.

NOTE SUR L'AIRE DU TRIANGLE SPHÉRIQUE,

Formule de Lhuilier;

PAR M. PROUHET.

---

1. Si l'on représente par $2S$ la surface d'un triangle sphérique, on pourra mettre les deux formules de Delambre

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}, \quad \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

sous la forme suivante :

$$(1)\qquad \frac{\sin\left(\frac{C}{2}-S\right)}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},$$

$$(2)\qquad \frac{\cos\left(\frac{C}{2}-S\right)}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

2. On déduit de l'équation (1)

$$\frac{\sin\frac{C}{2}-\sin\left(\frac{C}{2}-S\right)}{\sin\frac{C}{2}+\sin\left(\frac{C}{2}-S\right)} = \frac{\cos\frac{c}{2}-\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}+\cos\frac{a+b}{2}},$$

ce qui, en changeant les sommes ou différences en produits, devient

$$(3)\qquad \frac{\tang\frac{S}{2}}{\tang\frac{C-S}{2}} = \tang p \tang\frac{p-c}{2}.$$

Par une transformation analogue, on déduit de l'équation (2) la suivante :

$$(4)\qquad \tang\frac{S}{2}\tang\frac{C-S}{2} = \tang\frac{p-a}{2}\tang\frac{p-b}{2}.$$

Multipliant les équations (3) et (4) membre à membre et extrayant la racine carrée du résultat, on obtient

$$(5)\quad \tang\frac{S}{2} = \sqrt{\tang\frac{p}{2}\tang\frac{p-a}{2}\tang\frac{p-b}{2}\tang\frac{p-c}{2}},$$

formule de Simon Lhuilier.

3. On peut encore écrire les équations (1) et (2) sous cette forme,

$$(6)\qquad \sin\frac{C}{2}\cos S - \cos\frac{C}{2}\sin S = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\sin\frac{C}{2},$$

$$(7)\qquad \cos\frac{C}{2}\sin S + \sin\frac{C}{2}\sin S = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\cos\frac{C}{2}.$$

En résolvant ces deux équations par rapport à $\cos S$ et à $\sin S$, on aura, après quelques transformations faciles,

$$(8)\qquad \cos S = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

$$(9)\qquad \sin S = \frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

4. Si l'on désigne par 2σ la surface du triangle supplémentaire et par $2S'$, $2S''$, $2S'''$ les aires des triangles formés d'un côté du triangle proposé et des prolongements des deux autres, on aura

$$(10)\qquad \operatorname{tang}\frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{tang}\frac{S'}{2}\operatorname{tang}\frac{S''}{2}\operatorname{tang}\frac{S'''}{2}}{\operatorname{tang}\frac{S}{2}}}.$$

DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES DE M. STEINER

(voir t. XIV, p. 141);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES,
Lieutenant de vaisseau.

THÉORÈME I. *En inscrivant dans un quadrilatère deux coniques, les huit points de contact sont sur une même conique.*

Soient ABCD le quadrilatère; EF les points de concours de ses côtés opposés; G le point de croisement des diagonales AC, DB; H le point de rencontre de DB et de EF; 1, 2, 3, 4 les quatre points de contact de la première conique; 5, 6, 7, 8 ceux de la seconde sur les côtés AD, AB, BC, CD respectivement. On sait que les cordes de contact 12, 56, 87, 43 concourent en H, et que les cordes de contact 13, 24, 57, 68 concourent en G (*Géométrie supérieure*, n° 692).

Cela posé, par les cinq points 1, 2, 3, 4, 5 faisons passer une conique, elle coupera la droite H5 en un point qui sera le conjugué harmonique du point 5 par rapport aux deux points H et au point h, où cette droite est coupée par les diagonales FF et AC respectivement (*Géom. sup.*, n° 698); or le point 6, qui est sur cette droite HS, est précisément ce conjugué harmonique (*Géom. sup.*, n° 693); donc la conique (12345) passera par le point 6.

De même, cette conique coupera la droite G5 en un point qui sera le conjugué harmonique du point 5 par rapport au point G et au point g où la droite G5 coupe EF (n° 698); or le point 7, qui est sur cette droite, est

précisément ce conjugué harmonique (n° 693); donc la conique passe par ce point 7.

En considérant enfin la corde 6G8, on prouverait de la même manière que la conique passe par le point 8.

Ainsi le théorème est démontré.

THÉORÈME II. *Une conique étant inscrite dans un quadrilatère, si, par les quatre points de contact, on fait passer une seconde conique, elle coupera les côtés en quatre nouveaux points qui sont les points de contact d'une conique inscrite.*

Ce théorème est le réciproque du précédent. La démonstration s'appuie exactement sur les mêmes propositions de la *Géométrie supérieure;* il suffit de renverser le raisonnement qu'on vient de faire pour le premier théorème.

THÉORÈME III. *Les huit points de contact des deux coniques inscrites dans un quadrilatère donnent soixante-dix groupes de quatre points.*

Douze de ces points sont avec deux des quatre sommets opposés sur une même conique.

Ces douze coniques se partagent en six couples de coniques tels, que dans chaque couple les coniques ont un double contact.

On a soixante-dix groupes de quatre points, parce que c'est le nombre des combinaisons différentes de huit points pris quatre à quatre.

Les trois diagonales AC, BD, EF du quadrilatère sont des ellipses infiniment aplaties inscrites dans ce quadrilatère; leurs extrémités représentent chacune deux points de contact de ces ellipses avec les côtés du quadrilatère. Donc, par le théorème I, les deux extrémités d'une même diagonale se trouvent sur la même conique que quatre points de contact d'une autre conique inscrite.

Cela donne d'abord les six coniques :

(1234 AC), (1234 BD), (1234 EF),
(5678 AC), (5678 BD), (5678 FF).

Combinons actuellement ces extrémités des diagonales avec quatre points de contact appartenant à deux coniques distinctes, et choisis de manière que l'on n'ait que deux points sur chaque côté du quadrilatère en comptant ces extrémités elles-mêmes; on obtiendra les six coniques suivantes :

(1278 AC), (1476 BD), (1638 EF),
(3456 AC), (3258 BD), (2457 EF).

Je dis ces *six coniques*, car il est évident que les raisonnements employés pour démontrer le théorème I s'appliquent encore ici, puisque les cordes (12) et (78), par exemple, concourent au point H, *pôle* de AC; que, dans le second groupe, les cordes (14), (67) concourent au *pôle* de BD, et que, dans le troisième, les cordes (13), (68) concourent au *pôle* de EF.

Et il est d'ailleurs bien évident que ce sont là les seules combinaisons possibles. En tout douze coniques.

Associons-les de la manière suivante :

(1234 AC)	(5678 AC)	(1234 BD)
(1278 AC)	(5634 AC)	(1674 BD)
(5678 BD)	(1234 EF)	(5678 EF)
(5238 BD)	(1638 EF)	(5274 EF)

Les deux coniques de chacun de ces six groupes ont un double contact aux sommets du quadrilatère par lesquels elles passent. Par exemple, les deux coniques (1234 AC) (1278 AC) se touchent en A et en C. Ceci résulte de ce que, dans ces deux coniques, la corde AC a le même pôle

H, et que, par conséquent, elles ont l'une et l'autre pour tangentes en A et C les droites AH, CH.

Et ainsi des autres. Le théorème est donc démontré.

Théorème IV. L'énoncé de ce théorème est évidemment faux; il faut lire :

Dans un quadrilatère inscrit à un cercle, le produit des distances de chaque point de la circonférence à deux côtés opposés est égal au produit des distances du même point aux deux autres côtés opposés.

Il est démontré dans la *Géométrie supérieure*, p. 463.

Théorème V. *Étant donné sur un plan un système de paraboles ayant même foyer* F *et deux points fixes* A *et* B, *si par ces deux points on mène quatre tangentes à l'une d'elles, le produit des rayons vecteurs qui aboutissent aux points de contact est constant, quelle que soit la parabole.*

En effet, le théorème n° 664 de la *Géométrie supérieure* (p. 498 — *autrement*) s'applique aux sections coniques avec une démonstration identique et il prend l'énoncé suivant :

Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, si une tangente roule sur la courbe, le produit de ses distances à deux sommets opposés est au produit de ses distances aux deux autres sommets opposés dans une raison λ *qui reste constante.*

La raison λ *est égale au produit des distances de l'un quelconque des deux foyers aux deux premiers sommets divisé par le produit des distances du même foyer aux deux autres sommets.*

Si l'un des foyers est à l'infini, $\lambda = 1$; donc :

Quand un quadrilatère est circonscrit à une parabole, le produit des distances du foyer de la courbe à deux sommets opposés est égal au produit des distances de ce foyer aux deux autres sommets.

Si l'on suppose que les deux premiers sommets soient deux points de la courbe, les deux autres sommets se confondront avec les deux points de concours des tangentes en ces deux points. Il en résulte que :

Quand un angle est circonscrit à une parabole, le produit des distances des points de contact des deux côtés au foyer de la courbe est égal au carré de la distance de son sommet à ce foyer.

De ce dernier théorème, dû à Lambert, on conclut, dans la question qui nous occupe, que le produit

$$Fa.Fb.Fc.Fd = FA^2.FB^2 = \text{constante}.$$

Or ce produit est indépendant de la parabole que l'on considère. Donc le théorème est démontré.

On démontre, par d'autres considérations, que si les points A et B sont deux sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à une conique dont les foyers sont φ et φ', on a toujours la relation

$$FA.FB = F\varphi.F\varphi',$$

F étant comme ci-dessus le foyer d'une parabole inscrite dans ce même quadrilatère. On a donc

$$Fa.Fb.Fc.Fd = F\varphi.F\varphi' = \text{constante},$$

quelles que soient la conique et la parabole auxquelles est circonscrit le quadrilatère qui donne lieu aux points de contact a, b, c, d, pourvu que cette conique ait les points φ et φ' pour foyers et que la parabole ait son foyer en F.

C'est le théorème VIII de M. Steiner.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 280 (CHASLES);

Par M. E. de JONQUIÈRES,
Lieutenant de vaisseau.

Il s'agit de prouver que si, par trois points en ligne droite de la branche infinie d'une courbe du troisième ordre, composée d'une telle branche et d'un ovale, on mène, respectivement, deux tangentes à l'ovale, les trois cordes de contact passent par un même point.

Je ferai voir, par la démonstration même, que ce théorème est susceptible d'un énoncé plus général.

Soient A, B, C les trois points en ligne droite pris sur la branche infinie; les trois cordes de contact sont pq, KL, FG.

Maclaurin démontre très-simplement, dans son *Traité des courbes du troisième ordre* (prop. XV, fin du corollaire), que si par chacun des trois points A, B, C on mène quatre tangentes à la courbe, toute droite qui joint deux quelconques des douze points de contact passe par l'un des dix autres, de telle sorte qu'en chacun des douze points de contact il y a toujours quatre cordes semblables qui viennent s'y croiser.

Par le point A passent les tangentes AF, AG à l'ovale; Af, Ag à la branche infinie.

Par le point B passent les tangentes BK, BL à l'ovale; Bk, Bl à la branche infinie.

Par le point C passent les tangentes CP, CQ à l'ovale; Cp, Cq à la branche infinie.

F, G, K, L, P, Q sont les points de contact sur l'ovale.

f, *g*, *k*, *l*, *p*, *q* sont les points de contact sur la branche infinie.

J'ajouterai que ce point de croisement est toujours le point de contact d'une tangente issue de celui des trois points A, B, C qui est étranger aux deux points de contact que réunit la corde en question. Ainsi, par exemple, les quatre cordes QG, PF, *fp*, *qg* qui joignent, deux à deux, les points de contact des tangentes issues des points A, C, viennent se couper au point de contact *k* de la tangente B*k* issue du troisième point B.

De même, le point de contact *f* de la tangente A*f* est le point de croisement des quatre cordes QL, PK, *ql*, *pk* qui joignent les points de contact relatifs aux points B, C.

De même encore, le point de contact *p* de la tangente C*p* issue du point C, est le point de croisement des quatre cordes LG, FK, *lg*, *fk* dont les extrémités sont les points de contact relatifs aux deux autres points A, B.

D'après cela, les triangles QLG, PKF dont les côtés homologues se coupent en *f*, *k*, *p* sur la droite *pf* sont *homologiques*. Donc (*Géométrie supérieure,* n° 365) leurs sommets homologues sont deux à deux sur trois droites concourantes en un même point O. Or ces trois droites PQ, LK, FG sont précisément les cordes de contact dont il s'agit dans l'énoncé de la question. Donc le théorème est démontré.

Considérons actuellement les deux triangles Q*lg*, P*kf*; ces triangles sont pareillement *homologiques* en vertu du *corollaire* déjà cité. Car les côtés *gl* et *kf* se coupent en *p*; les côtés Q*l*, P*k* se coupent en F; les côtés Q*g*, P*f* se coupent en K; et les trois points *p*, *k*, F sont en ligne droite. Donc les droites PQ, *kl*, *fg* qui joignent deux à deux les sommets homologues des deux triangles se croisent en un même point O′. Or, ces trois droites sont trois cordes de contact relatives aux trois points A, B, C dont

deux sont prises sur la branche infinie et une sur l'ovale.

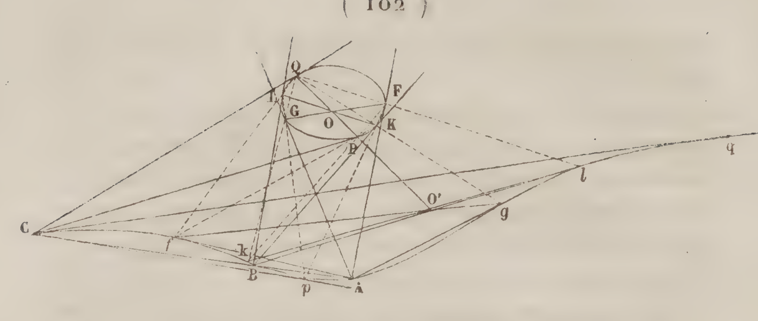
La comparaison des triangles qLg, pKf et, pareillement, celle des triangles qlG, Fkp donneraient lieu à une conclusion analogue, relativement aux deux autres permutations que l'on peut faire en prenant une corde de contact sur l'ovale et deux sur la branche infinie.

On a donc ce nouveau théorème.

Une courbe du troisième ordre étant composée d'un ovale et d'une branche infinie, si l'on prend trois points en ligne droite sur cette branche; que par l'un de ces trois points on mème deux tangentes à l'ovale, et que par chacun des deux autres on mène deux tangentes à la branche infinie, les trois cordes de contact ainsi déterminées passeront par un même point.

Remarque. Si les trois points A, B, C étaient pris sur les deux branches, savoir deux sur l'ovale et un sur la branche infinie, tels que Q, G, k, le théorème n'existerait plus; car par chacun des points Q, G de l'ovale on ne peut mener à la courbe aucune autre tangente que celle qui touche l'ovale en ce point même (et qui en représente deux superposées); il n'existe donc, dans ce cas, qu'une seule corde de contact, savoir celle qui est relative au point k, soit sur la branche infinie, soit sur l'ovale.

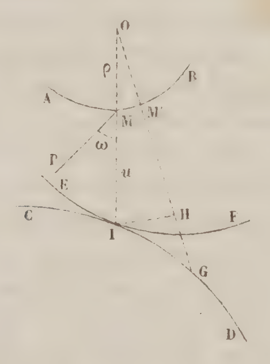
Quant à la proposition de Maclaurin, sur laquelle s'appuie la démonstration, elle résulte de considérations très-simples et purement géométriques, comme on le verra dans ma traduction du Traité de ce grand géomètre sur les courbes du troisième ordre, traduction que je n'ai d'ailleurs entreprise que pour faciliter aux jeunes gens la lecture de cet ouvrage remarquable, qui est aujourd'hui extrêmement rare en France et peut-être peu connu.



NOTE SUR LA THÉORIE DES ROULETTES;

Par E. CATALAN.

I. Problème. *Étant données deux lignes* AB, CD *situées dans un même plan, trouver une ligne* EF *telle, que si elle roule sur* CD, *un point* M, *invariablement lié à cette ligne* EF, *décrive* AB.



On sait que la droite menée du point *décrivant* M au point de contact I entre la *ligne roulante* EF et la *ligne fixe* CD est normale, en M, à la roulette AB.

Cela posé, on peut admettre que CD soit déterminée,

au moyen de AB, par les longueurs des normales telles que MI. En d'autres termes,

$$(1) \qquad y = f(x)$$

étant l'équation de AB, l'autre ligne donnée CD pourra être représentée par une équation de la forme

$$(2) \qquad u = \varphi(x).$$

Enfin on peut supposer que la ligne EF, *si elle existe*, soit rapportée aux coordonnées polaires u et ω, M étant le pôle, et l'axe étant une droite arbitraire MP, mobile avec le pôle. Il s'agit de trouver la relation entre ω et u.

A cet effet, menons la normale M′G à la roulette AB, au point M′ infiniment voisin de M; et, du centre de courbure O, décrivons l'arc IH. Nous aurons, dans le triangle *rectangle* HGI,

$$(3) \qquad \text{tang}\, G = \frac{\text{IH}}{\text{HG}} = \frac{(\rho + u)\varepsilon}{du} = \left(1 + \frac{u}{\rho}\right)\frac{ds}{du},$$

en désignant par ρ le rayon de courbure, par ds l'élément MM′, et par ε l'angle MOM′ ou l'*angle de contingence* de la roulette AB.

D'un autre côté, on sait que

$$\text{tang}\, G = u\frac{d\omega}{du},$$

donc

$$(4) \qquad d\omega = \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{\rho}\right) ds.$$

Si, au moyen des équations (1) et (2), on exprime ρ et ds en fonction de u et de du, la formule (4) donnera l'équation de la ligne cherchée EF. Par conséquent :

Toute courbe plane est une roulette.

II. Si

$$u = -\rho,$$

c'est-à-dire *si la ligne fixe* CD *est le lieu des centres de courbure des centres de la roulette* AB, l'équation (4) donne

$$d\omega = 0 \quad \text{ou} \quad \omega = \text{constante}.$$

Cette dernière équation représente une ligne droite. Donc, *la courbe quelconque* AB *peut être engendrée par un point* M *appartenant à une droite qui roule sur la développée de cette même courbe*; ce qui est évident.

III. Si $u =$ constante,

$$\omega = \frac{s}{u} + \int \frac{ds}{\rho};$$

ou, à cause de

$$ds = dx\sqrt{1 + y'^2}, \quad \rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

$$\omega = \frac{s}{u} + \int \frac{y''\,dx}{1 + y'^2},$$

ou encore

(5) $$\omega = \frac{s}{u} + \text{arc tang}\, y' + \text{constante}.$$

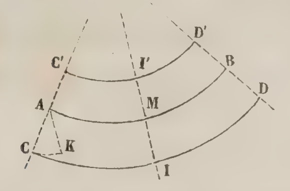
Mais le rayon vecteur u étant constant, *la courbe roulante* EF *est une circonférence dont le centre est le point décrivant* M. L'élément de cette circonférence, ou l'élément de la ligne fixe CD, a pour expression

(6) $$d\sigma = u\,d\omega.$$

Si donc nous supposons, ce qui est permis, que $y' = 0$ donne $s = 0$ et $\sigma = 0$, nous aurons, à cause des relations (5) et (6),

$$\sigma = s + u \text{ arc tang}\, y'.$$

De là ce théorème très-probablement connu :



Si l'on considère une courbe AB *et une* parallèle CD *à cette courbe, la différence entre les deux arcs correspondants* CI, AM (c'est-à-dire terminés à deux normales communes AC, MI) *est égale à l'arc de cercle* CK, *décrit de l'origine* A *comme centre, et terminé à une parallèle* AK *à la normale commune* MI.

IV. Soit C′I′D′ une autre parallèle à AMB, menée à la distance u. On aura

$$C'I' = AM - \operatorname{arc\,tang} y',$$

et, par conséquent,

$$AM = \frac{1}{2}(CI + C'I').$$

Ainsi *l'arc* AM *est égal à la demi-somme des arcs correspondants* CI, C′I′ ; ce qui est encore évident.

V. Supposons que la ligne fixe CD soit droite. Alors, en prenant cette ligne pour axe des abscisses, on aura

$$(7) \qquad u = y\sqrt{1 + y'^2};$$

puis, par l'équation (4),

$$d\omega = \int \frac{dx}{y} + \frac{dy'}{1 + y'^2},$$

$$(8) \qquad \omega = \int \frac{dx}{y} + \operatorname{arc\,tang} y' + \text{constante}.$$

Ces deux dernières formules feront connaître, dans chaque cas particulier, *la courbe* EF *qui, roulant sur une*

droite donnée, fait décrire, à un point qu'elle entraîne, une ligne donnée AB.

VI. Si, par exemple, AB est une droite ayant pour équation

$$y = x \tang \alpha,$$

les équations (7) et (8) deviendront

$$u = \frac{x \tang \alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad \omega = \cot \alpha . \, \mathrm{l} x + \alpha + \text{constante},$$

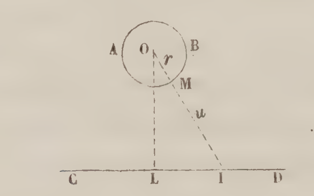
d'où en supposant $\omega = 0$ pour $x = 1$,

$$(9) \qquad u = \frac{\tang \alpha}{\cos \alpha} e^{\omega \tang \alpha}.$$

Cette équation représente une spirale logarithmique. Donc, *quand une spirale logarithmique roule sur une droite, son pôle décrit une droite.*

VII. La ligne CD étant toujours une droite, si l'on prend, pour la roulette AB, une cycloïde ordinaire, une chaînette, etc., on trouve que la courbe roulante est une circonférence, une parabole, etc.

VIII. Considérons le cas particulier où, la ligne fixe



étant toujours une droite CD, la roulette AB serait une circonférence de rayon r. Désignons par β l'ordonnée OL de son centre et par φ l'angle IOL. Nous aurons

$$u = \frac{\beta}{\cos \varphi} - r, \quad \rho = r, \quad ds = r d\varphi;$$

puis

$$d\omega = \frac{\beta\, d\varphi}{\beta - r\cos\varphi}.$$

L'intégrale de cette équation est, en supposant $\omega = 0$ pour $\varphi = 0$,

$$\omega = \frac{2\beta}{\sqrt{\beta^2 - r^2}} \operatorname{arc\,tang}\left[\sqrt{\frac{\beta + r}{\beta - r}} \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi\right].$$

Mais, à cause de $\cos\varphi = \frac{\beta}{u + r}$,

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{u + r - \beta}{u + r + \beta}};$$

donc l'équation de la courbe EF est

$$\omega = \frac{2\beta}{\sqrt{\beta^2 - r^2}} \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{(\beta + r)(u + r - \beta)}{(\beta - r)(u + r + \beta)}}.$$

Celle-ci donne, par un calcul facile,

(10) $$u = \frac{\frac{\beta^2 - r^2}{r}}{1 + \frac{\beta}{r}\cos\frac{\omega\sqrt{\beta^2 - r^2}}{\beta}}.$$

Cette dernière équation a la forme de celle qui appartient aux *transformées des sections coniques* (*). Mais, comme le multiplicateur de ω est une fraction proprement dite, la ligne EF représentée par l'équation (10) n'est pas une de ces transformées.

IX. Les derniers calculs supposent l'ordonnée β plus grande que le rayon r.

(*) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, seconde partie, p. 58.

Si $\beta = r$, la formule (10) doit être remplacée par

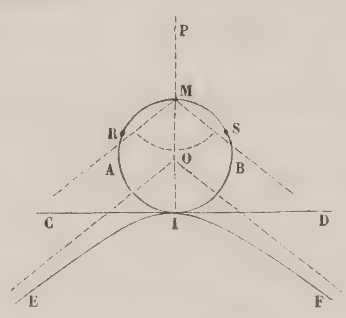
(11) $$u = \frac{2r}{(C - \omega)^2 - 1},$$

C désignant la constante arbitraire.

Si on la suppose nulle, l'équation (11) devient

(12) $$u = \frac{2r}{\omega^2 - 1},$$

$\omega = 0$ donne $u = -2$; ainsi quand le point de contact entre la courbe roulante et la droite CD se confond avec le point de contact I entre la droite et la circonférence AB, le point décrivant est en M, à l'extrémité du diamètre IM, et l'axe des amplitudes est dirigé suivant le prolongement MP de ce diamètre.



La courbe roulante EIF a deux asymptotes, parallèles aux rayons vecteurs *infinis* déterminés par

$$\omega = \pm 1,$$

et situées à une distance de ces rayons égale à r. Quand cette courbe roulera sur CD, le point M décrira l'arc RMS, dont la longueur est égale au diamètre IM. Etc.

MÉTHODE DE QUADRATURE DE COTES;

D'APRÈS GAUSS (*).

1. *Lemme.* Soit

$$Y = \sum_0^n \frac{A(\mu)\, T(\mu)}{M(\mu)};$$

le signe sommatoire se rapporte à l'indice μ.

n est un nombre positif entier donné et μ prend successivement les $n+1$ valeurs $0, 1, 2, \ldots n$; les A sont des constantes données,

$$T_{(\mu)} = \frac{nt(nt-1)(nt-2)\ldots(nt-n)}{nt-\mu};$$

t une variable; de sorte que

$$T_{(\mu)} = nt(nt-1)(nt-2)\ldots(nt-\mu+1)$$
$$(nt-\mu-1)\ldots(nt-n).$$

Désignons par $M_{(\mu)}$ la valeur numérique que prend $T_{(\mu)}$ en y faisant $nt = \mu$, on aura

$$M_{(\mu)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots 1.-1.-2\ldots\mu-n,$$
$$T_0 = (nt-1)(nt-2)\ldots(nt-n),$$
$$M_0 = -1.-2.-3\ldots -n.$$

Le premier terme de Y est

$$\frac{A(nt-1)(nt-2)\ldots(nt-n)}{(-1)(-2)(-3)\ldots(-n)}.$$

On met A au lieu de $A_{(0)}$.

(*) *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi,* autore Carolo Friderico Gauss, Societati regiæ Scientiarum exhibita D. 16 septembris 1814, p. 39-76.

Le deuxième terme est

$$\frac{A_1\, nt\,(nt-2)\ldots(nt-n)}{1.-1\ldots1-n},$$

le dernier terme est

$$\frac{A_n\, nt\,(nt-1)\ldots(nt-n+1)}{n(n-1)\ldots1}.$$

Faisant successivement t égal à l'un des nombres de la suite

$$0,\quad \frac{1}{n},\quad \frac{2}{n},\quad \frac{3}{n},\ldots,\quad \frac{n}{n},$$

les $n+1$ valeurs numériques correspondantes de Y sont

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ldots\ A_n.$$

Si Y_1 est une autre fonction de t, ayant ces mêmes valeurs pour les mêmes valeurs de t, $Y'-Y$ sera divisible par les $(n+1)$ facteurs

$$t,\quad t-\frac{1}{n},\quad t-\frac{2}{n},\ldots,\quad t-1,$$

et, par conséquent, par le produit de ces facteurs. Il faut donc que Y_1 soit d'un degré plus élevé que t; ainsi de toutes les fonctions de t qui donnent ces valeurs A, $A_1,\ldots,$ A_n pour les valeurs correspondantes de t, la moins élevée est la fonction Y.

Corollaire. Si une fonction de t étant développée suivant les puissances de t est interrompue avant le terme qui renferme t^{n+1}, cette fonction est identique avec la fonction Y.

2. Soit à intégrer $\int_g^h y\,dx$ par la méthode des rectangles; où y est une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x.

Faisons

$$h - g = \Delta,$$

donnons successivement à x les $n+1$ valeurs

$$g, \quad g + \frac{\Delta}{n}, \quad g + \frac{2\Delta}{n}, \quad g + \frac{3\Delta}{n}, \ldots, \quad g + \frac{n\Delta}{n},$$

et supposons que les valeurs correspondantes de y sont

$$A, \ A_1, \ A_2, \ldots \ A_n.$$

Posons

$$x = g + \Delta t,$$

où t est une nouvelle variable et y devient fonction de t.

Alors

$$\int y\, dx = \Delta \int y\, dt.$$

Remplaçons y par Y et l'on aura

$$\int y\, dx = \Delta \int Y\, dt.$$

Développant $T_{(\mu)}$ suivant les puissances décroissantes de t, on a

$$T_{(\mu)} = \alpha t^n + \beta t^{n-1} + \gamma t^{n-2} + \delta t^{n-3} + \ldots,$$

$$\int_0^1 T_\mu\, dt = \frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n-1} + \frac{\delta}{n-2} + \ldots = M_\mu R_\mu,$$

M_μ est un nombre, donc R_μ est aussi un nombre. On aura

$$\Delta \int_0^1 y\, dt = \Delta \int_0^1 \sum \frac{T_\mu\, dt}{M_{(\mu)}}$$

$$= \Delta (AR + A_1 R_1 + A_2 R_2 + \ldots + A_n R_n).$$

Car

$$g = 0, \quad h = 1, \quad \Delta = 1.$$

Cette intégrale est exacte.

Exemple :

$$n = 5, \quad \mu = 2,$$

$$\begin{aligned} T_2 &= 5t(5t-1)(5t-3)(5t-4)(5t-5) \\ &= 5^5 t^5 - 13.5^4.t^4 + 59.5^3.t^3 - 107.5^2.t^2 + 60.5.t, \end{aligned}$$

$$M_2 = 2.1.-1.-2.-3 = -12,$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 3125, \\ \beta &= -6125, \\ \gamma &= 7375, \\ \delta &= -2675, \\ \varepsilon &= 300; \end{aligned}$$

$$-12\,R_2 = \frac{3125}{6} - 1625 + \frac{7375}{4} - \frac{2675}{3} + \frac{300}{2} = -\frac{25}{12},$$

$$R_2 = \frac{25}{144}.$$

3. On peut abréger ce calcul. Posons

$$2t - 1 = u,$$

alors

$$T_{(\mu)} = \frac{(nu+n)(nu+n-2)(nu+n-4)\ldots(nu-n+4)(nu-n+2)(nu-n)}{2^n(nu+n-2\mu)}.$$

Posons

$$\frac{(n^2u^2-n^2)[n^2u^2-(n-2)^2][n^2u^2-(n-4)^2][n^2u^2-(n-6)^2]\ldots}{n^2u^2-(n-2\mu)^2} = U_{(\mu)}.$$

Lorsque n est pair, le numérateur se termine par $(n^2u^2-4)\,nu$, et lorsque n est impair par

$$(n^2u^2-9)(n^2u^2-1),$$

et

$$T_\mu = \frac{nu-n+2\mu}{2^n}\,U_{(\mu)},$$

$U_{(\mu)}$ est de degré $n - 1$ en u; et

$$\int_0^1 T_\mu \, dt = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} T_\mu \, du$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{nu \, U_\mu \, du}{2^{n+1}} + \int_{-1}^{+1} \frac{(2\mu - n) \, U_\mu \, du}{2^{n+1}}.$$

Posons

$$U_{(\mu)} = \alpha u^{n-1} + \beta u^{n-3} + \gamma u^{n-5} + \ldots.$$

Si n est pair la seconde intégrale s'évanouit, et si n est impair la première s'évanouit.

Ainsi pour n pair,

$$\int_0^1 T_\mu \, dt = \frac{1}{2^n} \left(\frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n-1} + \frac{\gamma}{n-3} + \frac{\delta}{n-5} + \ldots \right);$$

pour n impair,

$$\int_0^1 T_\mu \, dt = \frac{2\mu - n}{2^n} \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n-2} + \frac{\gamma}{n-4} + \frac{\delta}{n-6} + \ldots \right).$$

U_μ ne change pas en remplaçant $n - 2\mu$ par $2\mu - n$, c'est-à-dire en remplaçant μ par $n - \mu$, donc

$$U_{(\mu)} = U_{(n-\mu)}.$$

Ainsi

$$\int_0^1 T_{(n-\mu)} \, dt = \pm \int_0^1 T_\mu \, dt,$$

le signe supérieur pour n pair et le signe inférieur pour n impair; et comme

$$M_{n-\mu} = \pm M_\mu,$$

on a donc toujours

$$R_{n-\mu} = R_\mu.$$

Ainsi, dans les coefficients $R, R_1, R_2, \ldots, R_n$,

$$R = R_n, \quad R_1 = R_{n-1}, \quad R_2 = R_{n-2}, \ldots.$$

Table des valeurs de R, *d'après Cotes.*

Valeurs de *n*.					
1	$R = R_1 = \frac{1}{2}$.				
2	$R = R_2 = \frac{1}{6}$,	$R_1 = \frac{2}{3}$.			
3	$R = R_3 = \frac{1}{8}$,	$R_1 = R_2 = \frac{3}{8}$.			
4	$R = R_4 = \frac{7}{90}$,	$R_1 = R_3 = \frac{16}{45}$,	$R_2 = \frac{2}{15}$.		
5	$R = R_5 = \frac{19}{288}$,	$R_1 = R_4 = \frac{25}{96}$,	$R_2 = R_3 = \frac{25}{144}$.		
6	$R = R_6 = \frac{11}{840}$,	$R_1 = R_5 = \frac{9}{35}$,	$R_2 = R_4 = \frac{9}{280}$,	$R_3 = \frac{34}{105}$.	
7	$R = R_7 = \frac{751}{17280}$,	$R_1 = R_6 = \frac{3577}{17280}$,	$R_2 = R_5 = \frac{49}{640}$,	$R_3 = R_4 = \frac{2089}{17280}$.	
8	$R = R_8 = \frac{980}{28350}$,	$R_1 = R_7 = \frac{2944}{14175}$,	$R_2 = R_6 = -\frac{464}{14175}$,	$R_3 = R_5 = \frac{5248}{14175}$,	$R_4 = -\frac{454}{2835}$.
9	$R = R_9 = \frac{2857}{89600}$,	$R_1 = R_8 = \frac{15741}{89600}$,	$R_2 = R_7 = \frac{27}{2240}$,	$R_3 = R_6 = \frac{1209}{5000}$,	$R_4 = R_5 = \frac{2889}{44800}$.

Valeurs de *n*.						
10	$R = R_{10} = \frac{16067}{598752}$,	$R_1 = R_9 = \frac{26575}{149688}$,	$R_2 = R_8 = -\frac{16175}{199584}$,	$R_3 = R_7 = \frac{5675}{12474}$,	$R_4 = R_6 = -\frac{4825}{11088}$,	$R_5 = \frac{17807}{24948}$.

4. *Évaluation de l'erreur.*

Soit

$$\int_0^1 t^m\,dt = \frac{1}{m+1} = \text{valeur exacte}.$$

Partageons l'intervalle de o à 1 en $n+1$ parties égales

$$0,\quad \frac{1}{n},\quad \frac{2}{n},\quad \frac{3}{n},\ldots,\quad \frac{n}{n},$$

$$\Delta = h - g = 1,$$

les $n+1$ valeurs de A sont

$$0,\quad \frac{1}{n^m},\quad \left(\frac{2}{n}\right)^m,\quad \left(\frac{3}{n}\right)^m,\ldots,\quad \left(\frac{n}{n}\right)^m;$$

donc

$$\int_0^1 t^m\,dt = \frac{1}{n^m}\left[R_1 + 2^m.R_2 + 3^m.R_3 + \ldots + n^m.R_n\right],$$

valeur approchée.

Désignons par $k_{(m)}$ la différence des deux valeurs, on a

$$k_{(m)} = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n^m}\left[R_1 + 2^m R_2 + 3^m R_3 + \ldots + n^m R_n\right],$$

$$k = 1 - R_1 - R_2 - \ldots - R_n, \quad \text{car} \quad m = 0.$$

Développant y suivant les puissances croissantes de t,

$$y = K + K_1 t + K_2 t^2 + K_3 t^3 + \ldots,$$

alors

$$k_{(m)} = K k + K_1 k_1 + K_2 k_2 + K_3 k_3 + \ldots + K_n k_n.$$

Car pour t^0 la différence est k, pour t^1 la différence est k_1, etc.

Tant que le développement de y ne dépasse pas n, la valeur approchée se confond avec la vraie valeur; ainsi

$k_{(0)}, k_{(1)}, k_{(2)}, \ldots, k_{(n)}$ sont nuls et la correction ne commence qu'à k_{n+1}. En effet, tant que m est moindre que n, y est identique avec Y et l'intégration est exacte telle qu'elle a été donnée ci-dessus. Donc

$$k_m = K_{n+1} k_{n+1} + K_{n+2} k_{n+2} + \ldots.$$

Exemple.

$$n=1,\quad k_2 = -\frac{1}{6},\qquad k_3 = -\frac{1}{4},\qquad k_4 = -\frac{3}{10},$$

$$n=2,\quad k_3 = 0,\qquad k_4 = -\frac{1}{120},\qquad k_5 = -\frac{1}{48},$$

$$n=3,\quad k_4 = -\frac{1}{270},\qquad k_5 = -\frac{1}{108},$$

$$n=4,\quad k_5 = 0,\qquad k_6 = -\frac{1}{2688},\qquad k_7 = -\frac{1}{768},$$

$$n=5,\quad k_6 = -\frac{11}{32500},\qquad k_7 = -\frac{11}{15000},$$

$$n=6,\quad k_7 = 0,\qquad k_8 = -\frac{1}{38880},\qquad k_9 = -\frac{1}{8640},$$

$$n=7,\quad k_8 = -\frac{167}{10588410},\qquad k_9 = -\frac{167}{2352980},$$

$$n=8,\quad k_9 = 0,\qquad k_{10} = -\frac{37}{17301504},\qquad k_{11} = -\frac{37}{3145728}.$$

Pour $n=1$,

$$k_1 = 0,$$

$$k_1 = \frac{1}{2+1} - \frac{1}{1^2} R_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}.$$

Pour $n=2$,

$$k_1 = k_2 = 0,$$

$$k_3 = \frac{1}{3+1} - \frac{1}{2^3}(R_1 + 2^3 R^2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3} + \frac{8}{6}\right) = 0,$$

$$k_4 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2^4}(R_1 + 2^4 R^2 + 3) = \frac{1}{5} - \frac{1}{66}\left(\frac{2}{3} + \frac{16}{6}\right) = -\frac{1}{120}.$$

On a en général pour n pair

$$k_{n+1} = 0,$$

et

$$k_{n+3} = \frac{n+3}{2} k_{(2n+2)}.$$

En effet, soit l_m la différence entre la valeur vraie et la valeur approchée de

$$\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^m dt,$$

on a

$$l_{(m)} = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^m dt$$

$$- \left[\begin{array}{c} \left(-\frac{1}{2}\right)^m R + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)^m R_1 + \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{2}\right)^m R_2 \\ + \left(\frac{3}{n} - \frac{1}{2}\right)^m R_3 + \ldots + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^m R_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^m R_n \end{array} \right].$$

Pour m impair l'intégrale et la série s'évanouissent; car

$$R_p = R_{n-p}.$$

Pour m et n pairs

$$l_m = \frac{1}{2^m (m+1)} - \frac{2}{n^m}$$

$$\times \left[\begin{array}{c} \left(\frac{1}{2} n\right)^m R + \left(\frac{1}{2} n - 1\right)^m R_1 + \left(\frac{1}{2} n - 2\right)^m R_2 + \ldots \\ + 2^m R_{\frac{1}{2} n - 2} + R_{\frac{1}{2} n - 1} \end{array} \right].$$

Pour m pair et n impair

$$l_m = \frac{1}{2^m} \left[\frac{1}{m+1} - \frac{2}{n^m} n^m R + (n-2)^m R_1 + (n-4)^m R_2 + \ldots + 3^m R_{\frac{n-3}{2}} + R_{\frac{n-1}{2}} \right].$$

Développons y suivant les puissances $t - \frac{1}{2}$:

$$y = L + L_1\left(t - \frac{1}{2}\right) + L_2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + L_3\left(t - \frac{1}{2}\right)^3 + \ldots;$$

la correction sera

$$l_m = L\,l + L_2\,l_2 + L_4\,l_4 + L_6\,l_6 + \ldots.$$

Car pour toute valeur de m qui ne surpasse pas n, $l_{(m)}$ s'évanouit.

Ainsi la correction sera pour n pair

$$L_{n+1}\,l_{n+2} + L_{n+4}\,l_{n+4} + L_{n+6}\,l_{n+6} + \ldots,$$

pour n impair

$$L_{n+1}\,l_{n+1} + L_{n+3}\,l_{n+3} + L_{n+5}\,l_{n+5} + \ldots,$$

On a

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)^m = t^m - \frac{1}{2}\,mt^{m-1} + \frac{1}{4}\,\frac{m(m-1)}{1.2}\,t^{m-2} + \ldots,$$

donc

$$l_m = k_m - \frac{1}{2}\,mk_{m-1} + \frac{1}{4}\,\frac{m(m-1)}{1.2}\,k_{m-2} + \ldots,$$

car pour t^m la correction est k_m, etc.

Et de même

$$k_m = l_m + \frac{1}{2}\,m\,l_{m-1} + \frac{1}{4}\,\frac{m(m-1)}{1.2}\,l_{m-2}$$

(où il faut rejeter les l d'indice impair).

Il faut dans les deux séries (p. 115) ne commencer qu'à $n+1$.

$$k_{n+1} = l_{n+1},$$

$$k_{n+2} = l_{n+2} + \frac{1}{2}(n+2)\,l_{n+1},$$

$$k_{n+3} = l_{n+3} + \frac{1}{2}(n+3)\,l_{n+2} + \frac{1}{4}\,\frac{(n+3)(n+2)}{1.2}\,l_{n+1},$$

car

$$k_n = k_{n-1} = k = 0,$$
$$l_n = l_{n-1}, \quad l = 0.$$

Donc si n est pair,

$$k_{n+1} = 0,$$
$$k_{n+2} = l_{n+2},$$
$$k_{n+3} = \frac{n+3}{2} l_{n+2} = \frac{n+3}{2} k_{n+2};$$

si n est impair,

$$k_{n+1} = l_{n+1},$$
$$k_{n+2} = \frac{n+2}{2} l_{n+1} = \frac{n+2}{2} k_{n+1};$$

ce qui démontre les relations indiquées ci-dessus.

Il est toujours avantageux dans la méthode de Cotes, de prendre n pair, parce qu'alors $k_{n+1} = 0$ et la correction est de l'ordre $n + 1$.

Autre intégration par approximation.

$$\int_g^h ydx, \qquad g - h = \Delta, \qquad \Delta t = x - g,$$
$$\int_g^h ydx = \Delta \int_0^1 ydt,$$

y devient fonction de t.

Soit

$$\begin{aligned} Y = A & \frac{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)\ldots(t-a_n)}{(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)\ldots(a-a_n)} \\ + A_2 & \frac{(t-a)(t-a_2)(t-a_3)\ldots(t-a_n)}{(a_1-a)(a_2-a)(a_3-a)\ldots(a_n-a)} \\ + A_2 & \frac{(t-a)(t-a_1)(t-a_3)\ldots(t-a_n)}{(a_2-a)(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_1-a_n)} \\ & \vdots \\ A_n & \frac{(t-a)(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_{n-1})}{(a_n-a)(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}. \end{aligned}$$

Supposons que pour ces valeurs de

t	correspondent les valeurs de	y,
a	—	A,
a_1	—	A_1,
a_2	—	A_2,
$\vdots$		$\vdots$
a_n	—	A_n.

y est identique avec Y tant que le degré de y ne dépasse pas n, ou lorsque des termes de degré supérieur à n peuvent être négligés (p. 110).

Soit

$$\begin{aligned} T &= (t-a)(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_n) \\ &= t^{n+1} + \alpha t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \alpha_2 t^{n-2} + \ldots + \alpha_n. \end{aligned}$$

Désignant par M, M_1, M_2,..., les valeurs des numérateurs dans Y en y faisant t successivement égal à a, a_1, a_2, a_n, on aura

$$Y = \frac{AT}{M(t-a)} + \frac{A_1 T}{M_1(t-a_1)} + \frac{A_2 T}{M_2(t-a_2)} + \ldots + \frac{A_n T}{M_n(t-a_n)};$$

M, M_1, M_2,..., M_n sont les valeurs de $\frac{dT}{dt}$ pour $t = a$, a_1, a_2,..., a_n.

$$\frac{T}{t-a} = t^n + \begin{array}{l|l|l|l} a & t^{n-1} + a^2 & t^{n-2} + a^3 & t^{n-3} + \ldots + a^n \\ \alpha & \quad\; a\alpha & \quad\; \alpha a^2 & \quad\; \alpha a^{n-1} \\ & \quad\; \alpha_1 & \quad\; \alpha_1 a & \quad\; \alpha_1 a^{n-2} \\ & & \quad\; \alpha_2 & \quad\; \alpha_2 a^{n-3} \\ & & & \quad\; \vdots \\ & & & \quad\; \alpha_{n-1} \end{array}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{T}\,dt}{t-a} = \frac{1}{n+1} + \frac{a}{n} + \frac{a^2}{n-1} + \frac{a^3}{n-2} + \ldots + a^n$$
$$\frac{a}{n} + \frac{\alpha . a}{n-1} + \frac{\alpha a^2}{n-2} + \ldots + \alpha\, a^{n-1}$$
$$\frac{\alpha_1}{n-1} + \frac{\alpha_1 a}{n-2} + \ldots + \alpha_2 a^{n-3}$$
$$\frac{\alpha_2}{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}$$
$$= a^n + \alpha a^{n+1} + \alpha_1 a^{n-2} + \alpha_2 a^{n-3} + \ldots \alpha_{n-1}$$
$$+ \frac{1}{2}\left[a^{n-1} + \alpha a^{n-2} + \alpha_1 a^{n-3} + \ldots + \alpha_{n-2}\right]$$
$$+ \frac{1}{3}\left[a^{n-2} + \alpha a^{n-3} + \alpha_1 a^{n-4} + \ldots + \alpha_{n-3}\right]$$
$$+ \frac{1}{4}\left[a^{n-3} + \alpha a^{n-4} + \alpha' a^{n-5} + \ldots + a_{n-4}\right]$$
$$+ \ldots$$
$$+ \frac{1}{n-1}\left[a^2 + \alpha a + a'\right]$$
$$+ \frac{1}{n}\left[a + \alpha\right]$$
$$+ \frac{1}{n+1}.$$

Soit

$$\mathrm{T}\log\left(\frac{1}{1-t^{-1}}\right) = \mathrm{T}\left(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{2}t^{-4} + \ldots\right)$$
$$= \mathrm{T}' + \mathrm{T}'',$$

où T' représente la somme des termes où l'exposant de t est positif et T'' la somme des termes où cet exposant est négatif.

En faisant $t = a$ dans T', on obtient la série ci-dessus pour

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{T}\,dt}{t-a},$$

Désignant par $R, R_1, R_2, R_3, \ldots, R_n$ les valeurs que prend

$$\frac{T'}{\left(\frac{dT}{dt}\right)}$$

en y remplaçant successivement t par $a, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, on aura

$$\int_0^1 Y\,dt = AR + A_1 R_1 + A_2 R_2 + \ldots + A_n R_n,$$

$$\int_g^h y\,dx = \Delta \int_0^1 Y\,dt,$$

vraie ou approchée.

Faisons

$$u = 2t - 1, \quad b = 2a - 1,$$
$$b_1 = 2a_1 - 1, \quad b_2 = 2a_2 - 1 \ldots,$$

alors

$$T = \frac{U}{2^{n+1}}, \quad U = (u - b)(u - b_1)(u - b_2)\ldots(u - b_n),$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2^n}\frac{dU}{du};$$

ainsi on aura M, M_1, M_2, etc., si l'on remplace successivement u par $b, b_1, b_2, \ldots, b_n$ dans $\frac{1}{2^n}\frac{dU}{du}$.

$$\log \frac{1}{1 - t^{-1}} = \log \frac{1 + u^{-1}}{1 - u^{-1}}$$
$$= 2u^{-1} + \frac{2}{3}u^{-3} + \frac{2}{5}u^{-5} + \frac{2}{7}u^{-7} + \ldots.$$

Faisons

$$U\left(u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \frac{1}{7}u^{-7} + \ldots\right) = U' + U'',$$

où U' est la partie à exposants positifs, on aura

$$T' + T'' = \frac{1}{2^n}(U' + U'');$$

donc

$$U' = 2^n T', \quad U'' = 2^n T''.$$

Ainsi on trouve les valeurs de R, R_1, R_2, R_3, etc., en faisant successivement $u = b$, b_1, b_2, b_3, etc., dans

$$\frac{U'}{\left(\frac{dU}{du}\right)}.$$

3. *Applications numériques.*

$$n = 5, \quad a = 0,$$

$$a_1 = \frac{1}{5}, \quad a_2 = \frac{2}{5}, \quad a_3 = \frac{3}{5}, \quad a_4 = \frac{4}{5}, \quad a_5 = 1,$$

$$T = t^6 - 3t^5 + \frac{17}{5}t^4 - \frac{9}{5}t^3 + \frac{274}{625}t^2 - \frac{24}{625}t,$$

$$T' = t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{67}{30}t^3 + \frac{17}{20}t^2 + \frac{913}{7500}t - \frac{10}{7500},$$

$$\frac{T'}{\left(\frac{dT}{dt}\right)} = \frac{t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{67}{30}t^3 - \frac{17}{20}t^2 + \frac{913}{7500}t - \frac{10}{7500}}{6t^5 - 4t^4 + \frac{68}{5}t^3 - \frac{27}{5}t^2 - \frac{548}{625}t - \frac{24}{625}}.$$

Remplaçant t par les valeurs de a, on trouve les valeurs de R; mais la seconde méthode est un peu plus courte.

$$U = u^6 - \frac{7}{5}u^4 + \frac{259}{625}u^2 - \frac{9}{625},$$

$$U' = u^5 - \frac{16}{15}u^3 + \frac{277}{1875}u,$$

$$\frac{U'}{\left(\frac{dU}{du}\right)} = \frac{u^4 - \frac{16}{15}u^2 + \frac{277}{1875}}{6u^4 - \frac{28}{5}u^2 + \frac{518}{625}};$$

où l'on remplace u par les valeurs de b, savoir

$$-1, \quad -\frac{3}{5}, \quad -\frac{1}{5}, \ldots,$$

On aura aussi les valeurs de R et les mêmes que par la méthode de Cotes, puisque les a forment une progression arithmétique, et l'on a

$$R = R_5 = \frac{19}{288}, \quad R_1 = R_4 = \frac{25}{90}, \quad R_2 = R_3 = \frac{25}{144}\ (\text{p. } 114).$$

Degré de précision.

Posons

$$R a^m + R_1 a_1^m + R_2 a_2^m + \ldots + R_m a_m^m = \frac{1}{m+1} - k_m,$$

k_m est la différence entre l'intégrale exacte $\int_0^1 t^m\,dt$ et l'intégrale approchée. Nous aurons, en développant en séries,

$$\frac{R}{t-a} + \frac{R_1}{t-a_1} + \frac{R_2}{t-a_2} + \ldots + \frac{R}{t-a_m}$$

$$= (1-k)\,t^{-1} + \left(\frac{1}{2} - k_1\right) t^{-2} + \left(\frac{1}{3} - k_2\right) t^{-3}$$

$$+ \left(\frac{1}{4} - k_3\right) t^{-4} - \ldots$$

$$= t^{-1} + \frac{1}{2}\,t^{-2} + \frac{1}{3}\,t^{-3} + \frac{1}{4}\,t^{-4} + \ldots - \Theta,$$

$$\Theta = k t^{-1} + k_1\,t^{-2} + k_2\,t^{-3} + k_3\,t^{-4} + \ldots.$$

Comme nous savons que k, k_1, k_2, ..., k_m sont nuls, on a donc

$$\Theta = k_{n+1}\,t^{-(n+2)} + k_{n+2}\,t^{-(n+3)} + k_{n+3}\,t^{-(n+4)} + \ldots;$$

multipliant par T, on obtient

$$T\left(\frac{R}{t-a} + \frac{R_1}{t-a_1} + \frac{R_2}{t-a^2} + \ldots + \frac{R_m}{t-a_m}\right)$$

$$= T' + T'' - T\Theta\ (\text{p. } 121).$$

Le premier membre est une fonction entière de t de l'or-

dre n; donc le deuxième membre doit être aussi entier. Or T' est une fonction entière, donc

$$T'' = T\Theta.$$

Ainsi l'on trouve Θ en développant la fraction $\frac{T''}{T}$, et par là on détermine les coefficients k_{n+1}, k_{n+2}, etc., et si l'on développe y en puissance de t, savoir

$$y = K + K_1 t + K_2 t^2 + K_3 t^3 + \ldots,$$

on aura

$$\int y dt = k_{n+1} K_{n+1} + k_{n+2} K_{n+2} + \ldots.$$

Seconde manière d'exprimer la correction.

Soit

$$y = L + L_1 \left(t - \frac{1}{2}\right) + L_2 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + L_3 \left(t - \frac{1}{2}\right)^3 + \ldots,$$

la correction sera

$$l_{(n+1)} L_{n+1} + l_{n+2} L_{n+2} + l_{n+3} L_{n+3} + \ldots,$$

où l_m est la correction de l'intégrale

$$\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^m dt,$$

et l'on a

$$l_m = k_m - \frac{1}{2} m k_{m-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{m.m-1}{1.2} k_{m-2}$$
$$- \frac{1}{8} \cdot \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} k_{m-3} + \ldots.$$

Θ devient, en remplaçant t par $\frac{1}{2} u + \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} & 2k(u^{-1} + u^{-2} + u^{-3} - u^{-4} + \ldots) \\ & 4k_1(u^{-2} + 2u^{-3} + 3u^{-4} - 4u^{-5} + \ldots) \\ & + 8k_2(u^{-3} - 3u^{-4} + 6u^{-5} - 10u^{-6} + \ldots) \\ & + \ldots \end{aligned}$$

ou bien

$$2ku^{-1}+4\left(k_1-\frac{1}{2}\right)u^{-2}+8\left(k_2-\frac{1}{2}\cdot 2k_1+\frac{1}{4}k\right)u^{-3}$$
$$+6\left(k_3-\frac{1}{2}.3k_2+\frac{1}{4}.3k_1-\frac{1}{8}k\right)u^{-4},$$

ou

$$2lu^{-1}+4l_2u^{-2}+8l_2u^{-3}+16l_3u^{-4}+\ldots;$$

mais l, l_1, l_2,..., l_n sont nuls ; donc Θ se change en

$$2^{n+2}l_{n+1}u^{-(n+2)}+2^{n+3}l_{n+2}u^{-(n+3)}+2^{n+4}l_{n+3}u^{-(n+4)}.$$

Mais

$$\Theta=\frac{T''}{T}$$

et T, T″ se changent par la substitution de $\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}$ au lieu de t, en $\frac{U}{2^{n+1}}$ et $\frac{U''}{2^n}$ (voir ci-dessus, art. 2). Ainsi la fonction Θ devient $\frac{2U''}{U}$.

Désignant par Ω la série résultant du développement de $\frac{U''}{U}$, on a

$$\Omega=2^{n+1}l_{n+1}u^{-(n+2)}+2^{n+2}l_{n+2}u^{-(n+3)}$$
$$+2^{n+3}l_{n+3}u^{-(n+4)}+\ldots.$$

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus,

$$U''=-\frac{176}{13125}u^{-1}-\frac{304}{28125}u^{-3}-\frac{2576}{309375}u^{-5}+\ldots,$$
$$\Omega=-\frac{176}{13125}u^{-7}-\frac{832}{28125}u^{-9}-\frac{189856}{4296875}u^{-11}-\ldots.$$

La correction de la valeur approchée de l'intégrale est

$$-\frac{11}{525000}L_6-\frac{13}{112500}L_8-\frac{5933}{137500000}L_{10}-\ldots.$$

Méthode d'approximation plus approchée.

Quelles que soient les valeurs de $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$, l'approximation est toujours exacte jusqu'à l'ordre n; mais on peut choisir ces valeurs telles que l'approximation soit d'un ordre plus élevé ; ainsi dans la méthode de Cotes nous avons vu que l'ordre devient $n+1$ lorsque n est pair. Généralement, si les valeurs de a sont tellement choisies, que dans T'' ou U'' des termes disparaissent au commencement de la série, alors la précision dépassera l'ordre n d'autant d'unités qu'il aura disparu de termes.

Supposons

$$T = t^{n+1} + \alpha t^n + \alpha' t^{n-1} + \alpha'' t^{n-2} + \ldots;$$

il faut donc choisir α, α', α'' de manière que dans le produit

$$T\left(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} + \ldots\right)$$

les puissances t^{-1}, t^{-2}, $t^{-3}, \ldots, t^{-(n+1)}$ disparaissent, ou bien posant

$$U = u^{n+1} + \beta u^n + \beta' u^{n+1} + \beta'' u^{n+2} + \ldots,$$

on prenne β, β', β'' de manière que dans le produit

$$U\left(u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} - \frac{1}{7}u^{-7} - \ldots\right)$$

les puissances u^{-1}, u^{-2}, $u^{-3}, \ldots, u^{-(n+1)}$ disparaissent.

Il est évident que cette condition ne peut être satisfaite à moins que l'on n'ait

$$\beta = 0, \quad \beta'' = 0, \quad \beta''' = 0,$$

ce qui abrége le calcul.

Soit

$$n = 0;$$

alors

$$T = t + \alpha,$$

$$(t + \alpha)\left(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \ldots\right).$$

Pour que t^{-1} disparaisse, on doit avoir

$$\alpha + \frac{1}{2} = 0, \quad x = -\frac{1}{2},$$

donc

$$T = t - \frac{1}{2},$$

et

$$U = u,$$

$$n = 1, \quad T = t^2 + \alpha t + \alpha',$$

$$(t^2 + \alpha t + \alpha')\left(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} - \frac{1}{3}t^{-3} + \ldots\right).$$

Pour que t^{-1} disparaisse,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\alpha + \alpha' = 0.$$

Pour que t^{-2} disparaisse

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\alpha' = 0,$$

d'où

$$\alpha = -1, \quad \alpha' = \frac{1}{6}, \quad T = t^2 - t + \frac{1}{6}.$$

Pour $U = u^2 + \beta^2$,

$$(u^2 + \beta')\left(u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \ldots\right),$$

$$\beta' + \frac{1}{3} = 0, \quad \beta' = -\frac{1}{3}, \quad U = u^2 - \frac{1}{3},$$

$$n = 2, \quad T = t^3 + \alpha t^2 + \alpha' t + \alpha.$$

Pour que t^{-1}, t^{-2}, t^{-3} disparaissent, on a les équations

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{2}\alpha'+\alpha''=0,$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{3}\alpha'+\frac{1}{2}\alpha''=0,$$
$$\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\alpha+\frac{1}{4}\alpha'+\frac{1}{3}\alpha''=0,$$

d'où

$$\alpha=-\frac{3}{2},\quad \alpha'=\frac{3}{5},\quad \alpha''=-\frac{1}{20}.$$

Pour U on trouve

$$\beta'=-\frac{3}{5}.$$

Méthode générale par les fractions continues.

Par la théorie des fractions continues, on trouve que la fonction U qui jouit de la propriété que

$$\mathrm{U}\left(u^{-1}+\frac{1}{3}u^{-3}+\frac{1}{5}u^{-5}+\frac{1}{7}u^{-7}+\ldots\right)$$

donne une série qui commence par $u^{-(n+2)}$, est

$$\mathrm{U}=u^{n+1}-\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}u^{n-1}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4.(2n+1)(2n-1)}u^{n-3}$$
$$-\frac{(n+1)n\ n-1.n-2.n-3.n-4}{2.4.6.2n+1.2n-1.2n-3}u^{n-5}+\ldots,$$

et

$$\mathrm{T}=t^{n+1}-\frac{(n+1)^2}{1.2n+2}t^{n}+\frac{(n+1)^2.n^2}{1.2.(2n+2)(2n+1)}t^{n-1}$$
$$-\frac{(n+1)^2\,n^2\,(n-1)^2}{1.2.3.2n+2\ldots 2n+1.2n}t^{n-2}+\ldots.$$

Gauss donne ces valeurs par induction et dit que la démonstration en est facile.

Prochainement cette méthode et une application numérique (*).

(*) Voir pour la première démonstration, Prouhet (*N. A.*, t. I, p. 348).

REMARQUES DIVERSES SUR LES NOMBRES PREMIERS ;

PAR M. LEBESGUE,
Professeur.

1. THÉORÈME. *On peut toujours trouver tant de nombres consécutifs qu'on voudra qui ne soient pas premiers.*

La démonstration est bien simple et bien connue ; elle peut être présentée ainsi qu'il suit : Si l'on veut avoir au moins $2n$ nombres consécutifs non premiers, on représentera la suite complète des nombres premiers par

$$p_0 = 2, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 5, \ldots, \quad p_{i-1}, \; p_i, \; p_{i+1}.$$

Supposons que n tombe entre p_{i-1} et p_i, on fera

$$P = p_0\, p_1\, p_2 \ldots p_{i-1}.$$

Comme P, p_{i+1}, p_i sont premiers entre eux, on pourra toujours trouver des entiers x, y, z, tels, qu'on ait

$$Px - 1 = p_i\, y,$$
$$Px + 1 = p_{i+1}\, z,$$

et il en résultera que les

$$1 + 2\,(p_i - 1) = 2p_i - 1$$

nombres

$$Px - (p_i - 1),$$
$$(a) \qquad \ldots, \; Px - 1, \; Px, \; Px + 1, \; Px + 2, \ldots,$$
$$Px + (p_i - 1),$$

sont composés, et que chaque terme est divisible par un des nombres

$$2, \; 3, \; 5, \ldots, \; p_{i-1}, \; p_i, \; p_{i+1}.$$

Cela résulte des équations données plus haut pour les trois termes moyens

$$Px - 1, \quad Px, \quad Px + 1.$$

D'ailleurs P est divisible par les nombres

$$2, 3, 5, p_{i-1},$$

et il en est de même des nombres consécutifs

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, p_i - 1.$$

Ainsi les $2p_i - 1$ nombres (a) sont composés. Comme

$$p_i > n, \quad 2p_i - 1 > 2n - 1,$$

on a plus de $2n$ nombres consécutifs non premiers. Si l'on supprimait dans les nombres (a) les nombres pairs, il resterait $p_i - 1$ nombres impairs

$$Px - (p_i - 2),$$
$$\ldots, Px - 1, \quad Px + 1, \ldots,$$
$$Px + p_i - 2,$$

contenant

$$2 \times \frac{p_i - 1}{2} = p_i - 1 \text{ termes}.$$

De là ce théorème de Legendre :

On peut trouver $p_i - 1$ *nombres impairs consécutifs non premiers et divisibles chacun par quelques-uns des nombres*

$$3, 5, 7, \ldots, p_i, p_{i+1}$$

Quand on admet des diviseurs quelconques au lieu des diviseurs consécutifs, on obtient des solutions en nombres bien plus petits. On peut d'ailleurs en trouver à l'aide de la Table de Burckhardt. Entre les deux nombres premiers 3029867 et 3029947, dont la différence est 80, il n'y a pas de nombres premiers.

Legendre a cru avoir démontré qu'on ne saurait trouver plus de $p_i - 1$ nombres impairs consécutifs dont chacun fût divisible par quelqu'un des nombres

$$3,\ 5,\ 7, \ldots,\ p_{i+1}.$$

Il n'a fait que donner à la proposition une grande probabilité. Ainsi il n'a point prouvé que la formule

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B},$$

où A et B sont premiers entre eux, ou encore que la progression arithmétique

$$\mathrm{B},\quad \mathrm{B}+\mathrm{A},\quad \mathrm{B}+2\mathrm{A},\quad \mathrm{B}+3\mathrm{A}, \ldots$$

renferme une infinité de nombres premiers. Cette importante proposition a été démontrée par M. Dirichlet dans un Mémoire extrêmement remarquable (dont M. Terquem a donné la traduction dans le *Journal de Mathématiques*, t. IV, p. 39), et sa méthode lui a donné par suite nombre d'importants théorèmes.

On peut voir dans un article de M. Desboves (*Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 281) en quoi consiste l'imperfection de la démonstration de Legendre. Cependant comme il n'est pas prouvé que la proposition soit inexacte, et qu'on peut même l'établir rigoureusement pour un petit nombre de diviseurs consécutifs, par exemple pour

$$3,\ 5,\ 7,$$

on peut demander si la chose étant admise pour la suite de diviseurs

$$3,\ 5,\ 7, \ldots,\ p_{i+1},$$

est vraie aussi pour la suite

$$3,\ 5,\ 7, \ldots,\ p_{i+2}.$$

Ainsi M. Gauss ayant vérifié la loi de réciprocité de Legendre jusqu'à une certaine limite, a montré par une réduction à l'absurde que la limite pouvait être reculée, de sorte que la loi s'est trouvée généralement établie.

Cette démonstration très-compliquée a été notablement simplifiée par M. L. Dirichlet dans le tome XLVII du *Journal* de M. Crelle. Quelques propositions de ce Mémoire établissent très-simplement que les formules

$$8x+1, \quad 8x+3, \quad 8x+5, \quad 8x+7$$

renferment une infinité de nombres premiers. M. Serret en a déjà donné une démonstration élémentaire dans le *Journal de Mathématiques*, t. XVII, p. 186.

2. Théorème. *Les formules*

$$4x+1, \quad 4x+3$$

renferment une infinité de nombres premiers.

1°. On ne saurait avoir y^2+1 divisible par un nombre premier $4\alpha+3$, car en supposant que $4\alpha+3$ soit le moindre diviseur de cette forme, on aurait

$$y^2+1=(4\alpha+3)z.$$

Or on peut toujours poser

$$y=(4\alpha+3)n\pm r$$

de manière à avoir r pair inférieur à $4\alpha+3$. De là

$$r^2+1=4k+1=(4\alpha+3)(4n+3),$$

$4n+3$ étant nécessairement inférieur à $4\alpha+3$; or $4n+3$ a nécessairement un diviseur premier de forme $4\beta+3$, inférieur à $4\alpha+3$, ce qui est contre l'hypothèse.

(Cette démonstration est dans le Mémoire cité plus haut.)

2°. Il y a une infinité de nombres premiers $4k + 1$; car si $p_1, p_2, \ldots, p_i$ étaient les seuls de cette forme, on aurait

$$N = 4(p_1, p_2, \ldots, p_i)^2 + 1$$

composé et divisible par un nombre premier de forme $4k + 1$ et nécessairement autre que l'un des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_i$ qui ne divisent pas N.

3°. Il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4k + 3$, car si $p_1, p_2, \ldots, p_i$ étaient les seuls nombres de cette forme, on aurait

$$N = 4p_1, p_2, \ldots, p_i + 3$$

composé et ayant un diviseur $4k + 3$, autre que l'un des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_i$ qui ne divisent pas N. Cette démonstration est imitée d'Euclide.

TROISIÈME DÉMONSTRATION

De la possibilité de décomposer les fonctions algébriques entières en facteurs réels;

D'APRÈS GAUSS.

(Gotting. t. III, p. 135; 1816.)

1. Soit

$$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + Lx + M;$$

A, B, C,... sont des coefficients réels.

Faisons

$$x = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

on obtient

$$X = t + u\sqrt{-1},$$

$$t = r^m \cos m\varphi + A r^{m-1} \cos(m-1)\varphi + B r^{m-2} \cos(m-2)\varphi$$
$$+ C r^{m-3} \cos(m-3)\varphi + \ldots + L r \cos\varphi + M,$$
$$u = r^m \sin m\varphi + A r^{m-1} \sin(m-1)\varphi + B r^{m-2} \sin(m-2)\varphi$$
$$+ C r^{m-3} \sin(m-3)\varphi + \ldots + L r \sin\varphi.$$

Faisons

$$t' = r\frac{dt}{dr},$$
$$u' = r\frac{du}{dr},$$
$$t'' = r\frac{dt'}{dr},$$
$$u'' = r\frac{du'}{dr},$$
$$y = \frac{(t^2+u^2)(tt''+uu'') + (tu'+ut')^2 - (tt'+uu')^2}{r(t^2+u^2)^2};$$

il est évident que r disparaît du dénominateur.

2. Théorème. *Soit* R *une quantité positive déterminée, arbitraire pourtant et plus grande que les quantités*

$$mA\sqrt{2},\quad \sqrt{mB\sqrt{2}},\quad \sqrt[3]{mC\sqrt{2}},\quad \sqrt[4]{mD\sqrt{2}},\ldots$$

abstraction faite des signes; prenant

$$r = R,$$

$tt' + uu'$ *sera une quantité positive, quelque valeur réelle qu'on donne à* φ.

Démonstration. Posons

$$R\cos 45^\circ + AR^{m-1}\cos(45^\circ+\varphi) + BR^{m-2}\cos(45^\circ+2\varphi)$$
$$+ CR^{m-3}\cos(45^\circ+3\varphi) + \ldots$$
$$+ LR\cos[45^\circ+(m-1)\varphi]$$
$$+ M\cos(45^\circ+m\varphi) = T.$$

Désignons par U ce que devient T en remplaçant cosinus par sinus,

$$T' = R\frac{dT}{dR}, \quad U' = R\frac{dU}{dR},$$

$$T = \frac{R^{m-1}}{m\sqrt{2}}[R + mA\sqrt{2}\cos(45^\circ + \varphi)],$$

$$+ \frac{R^{m-2}}{m\sqrt{2}}[R^2 + mB\sqrt{2}\cos(45^\circ + 2\varphi)],$$

$$+ \frac{R^{m-3}}{m\sqrt{2}}[R^3 + mC\sqrt{2}\cos(45^\circ + 3\varphi)],$$

$$+ \frac{R^{m-4}}{m\sqrt{2}}[R^4 + mD\sqrt{2}\cos(45^\circ + 4\varphi)],$$

$$+ \ldots;$$

donc, vu les inégalités ci-dessus, T est essentiellement positif, quelque valeur qu'on donne à φ. On démontre de la même manière que T', U et U' sont positifs. Ainsi $TT' + UU'$ est une quantité positive. En faisant $r = R$ dans t, u, t', u', ces expressions deviennent

$$T\cos(45^\circ + m\varphi) + U\sin(45^\circ + m\varphi),$$
$$T\sin(45^\circ + m\varphi) - U\cos(45^\circ + m\varphi),$$
$$T'\cos(45^\circ + m\varphi) + U'\sin(45^\circ + m\varphi),$$
$$T'\sin(45^\circ + m\varphi) - U'\cos(45^\circ + m\varphi),$$

et $tt' + uu'$ se change en $TT' + UU'$; donc $tt' + uu'$ est une quantité positive, quelle que soit la valeur de φ, en faisant

$$r = R. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Donc aussi $t^2 + u^2$ devenant $T^2 + U^2$ est une quantité positive en faisant

$$r = R,$$

quelle que soit la valeur de φ; ainsi t et u ne peuvent devenir simultanément nuls tant que $r = \mathrm{R}$.

3. Théorème. *Lorsque* r *est compris entre* o *et* R, *et* φ *est compris entre* o *et* 360, *il existe des valeurs de* r *et de* φ *qui rendent simultanément nuls* t *et* u.

Démonstration. Supposons au contraire que dans ces intervalles t et u ne peuvent jamais s'évanouir simultanément. Alors dans ces mêmes intervalles y (p. 135) sera toujours une quantité finie; cette hypothèse mène à une absurdité. En effet, soit la double intégrale

$$\int_0^{\mathrm{R}} \int_0^{360} y\,dr\,d\varphi = \Omega;$$

intégrant par rapport à φ, on a indéfiniment

$$\int y\,d\varphi = \frac{tu' - ut'}{r\,(t^2 + u^2)} + \text{constante}.$$

Faisant

$$\varphi = 0,$$

u et u' s'évanouissent; donc la constante est nulle en faisant commencer l'intégrale à $\varphi = 0$.

Mais posant

$$\varphi = 360^\circ,$$

u et u' s'évanouissent encore. Donc, dans l'intervalle,

$$\int_0^{360} y\,d\varphi = 0,$$

quelle que soit la valeur de r. Donc

$$\Omega = 0.$$

On doit obtenir la même valeur en commençant l'intégration par r; alors

$$\int y\,dr = \frac{tt' + uu'}{t^2 + u^2};$$

on n'ajoute pas non plus de constante, l'intégrale commençant à

$$r = 0,$$

et alors

$$t' = 0, \quad u' = 0;$$

donc l'intégrale dans l'étendue de $r = 0$ à $r = \mathrm{R}$ se change en $\frac{\mathrm{TT}' + \mathrm{UU}'}{\mathrm{T}^2 + \mathrm{U}^2}$, quantité essentiellement positive pour toute valeur de φ (p. 136). Donc Ω n'est pas nul; ce qui établit une contradiction; l'hypothèse est donc inadmissible. Ainsi y ne conserve pas une valeur constamment finie dans les intervalles indiqués.

4. Nous avons vu qu'en remplaçant dans X la valeur de x par

$$x = r(\cos\varphi + \sqrt{1}\sin\varphi),$$

X se change en $t + u\sqrt{-1}$, et de même en $t - u\sqrt{-1}$, en faisant

$$x = r(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi).$$

Si donc pour des valeurs déterminées de r et de φ, savoir pour

$$r = g, \quad \varphi = \mathrm{G},$$

t et u s'annulent simultanément (l'existence de telles valeurs a été démontrée), alors par la substitution de

$$x = g(\cos\mathrm{G} + \sqrt{-1}\sin\mathrm{G})$$

et

$$x = g(\cos\mathrm{G} + \sqrt{-1}\sin\mathrm{G}),$$

X devient nul et deviendra divisible par

$$x - g(\cos\mathrm{G} + \sqrt{-1}\sin\mathrm{G})$$

et par

$$x - g\left(\cos G - \sqrt{-1}\sin G\right);$$

et toutes les fois qu'on n'a pas ni $g = 0$, ni $G = 0$, ces diviseurs sont inégaux et X sera divisible par leur produit

$$x^2 - 2g\cos G\ x + g,$$

et toutes les fois qu'on a soit $\cos G = \pm 1$ ou $G = 0$, les deux facteurs sont identiques, savoir $x - g$. Il est donc certain que X a un diviseur réel, soit du second degré, soit du premier, et comme la même conclusion subsiste pour le quotient, X sera entièrement décomposable en de tels facteurs.

DESCRIPTION MÉCANIQUE DE CERTAINES COURBES;

Par M. PAINVIN,

Docteur ès Sciences mathématiques, Répétiteur à l'institution Favart.

Étant donné un cercle fixe de centre C et un point fixe O, on imagine un rectangle invariable GHKL, emporté par un mouvement uniforme de rotation autour du point O, de sorte que l'axe AB de ce rectangle, égal au diamètre du cercle, passe constamment par ce point, et que les côtés GK et KL restent tangents à la circonférence.

On voit que cette dernière condition impose au rectangle un mouvement de glissement dans le sens de l'axe BA.

Ce mouvement se réalise dans l'industrie en adaptant un mécanisme très-simple au tour ordinaire.

Je fais abstraction du frottement.

§ I.

Je me propose d'abord de déterminer le mouvement d'un point quelconque du plan mobile GHKL.

Je prends, pour origine du temps, l'époque à laquelle le rectangle se trouve dans la position GHKL, et pour origine des coordonnées le point fixe O; les axes rectangulaires seront naturellement Ox et Oy, où OA est l'axe des x.

Soient

$OC = \alpha$,	
ω	la vitesse angulaire de rotation;
(a, b)	les coordonnées OP, PM d'un certain point M par rapport aux axes fixes Ox et Oy, à l'origine du temps;
(x, y)	les coordonnées du même point devenu M' par rapport aux mêmes axes, à l'époque t.

Soit G'H'K'L' la position du rectangle à cette époque t; si alors les coordonnées du point M' par rapport aux axes mobiles ox' et oy' sont (x', y'), on aura les formules

$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t,$$
$$y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t.$$

Or il est facile d'avoir x' et y'. En effet

$$a = OP, \quad b = MP,$$
$$x' = OP', \quad y' = M'P';$$

M' étant la position du point M à l'époque t. Or la distance du point à l'axe des abscisses n'a pas changé pendant le mouvement; donc

$$y' = M'P' = MP = b.$$

L'équation du cercle par rapport aux axes Ox et Oy étant

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2,$$

deviendra, en la rapportant aux axes ox' et oy',

$$x'^2 + y'^2 - 2\alpha(x'\cos\omega t - y'\sin\omega t) + \alpha^2 = R^2.$$

Soit OA′ l'abscisse d'une tangente parallèle à l'axe oy'. Faisons dans cette équation

$$x' = OA',$$

et exprimons que les deux racines sont égales ; on aura

$$OA' = \alpha\cos\omega t + R.$$

Or pendant le mouvement, on a toujours

$$PA = P'A'$$

ou

$$a + R - a = \alpha\cos\omega t + R - x';$$

donc

$$x' = a - \alpha + \alpha\cos\omega t.$$

Les lois du mouvement du point M seront donc données par les équations

$$(1)\quad \begin{cases} x = (a - \alpha)\cos\omega t - b\sin\omega t + \alpha\cos^2\omega t, \\ y = (a - \alpha)\sin\omega t + b\cos\omega t + \alpha\sin\omega t\cos\omega t, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(2)\quad \begin{cases} y\sin\omega t + x\cos\omega t = a - \alpha + \alpha\cos\omega t, \\ y\cos\omega t - x\sin\omega t = b. \end{cases}$$

L'élimination de t entre les équations (2) nous conduira à l'équation de la courbe décrite par le point M dans son mouvement

$$(3)\quad \begin{cases} [x(x - a) + y^2]^2 = (x^2 + y^2)[(a - \alpha)^2 + b^2] \\ + 2\alpha b[(a - \alpha)y - bx] + \alpha^2 b^2; \end{cases}$$

l'hypothèse $\alpha = 0$ donne un cercle ; résultat qu'on pouvait prévoir.

En faisant

$$b = 0 \quad \text{et} \quad a = \alpha,$$

on voit que le point C décrit un cercle dont le diamètre est

$$OC = \alpha.$$

Si le point m est sur l'axe des x, c'est-à-dire si $b = 0$, l'équation de la courbe en coordonnées polaires sera

$$r = \alpha \cos\theta \pm (a - \alpha);$$

c'est l'équation du limaçon de Pascal.

Il faut prendre le signe $+$, car pour $t = 0$ on doit avoir

$$x = r\cos\theta = a,$$
$$y = r\sin\theta = 0,$$

et, par conséquent,

$$r = a \quad \text{pour} \quad \theta = 0.$$

Si l'on prend toujours sur l'axe Ox deux points dont les abscisses soient respectivement a et $a + 2\alpha$, ces deux points décriront la même courbe; mais pour les superposer, il faudra tourner l'une d'elles de 180 degrés.

Je bornerai à ces quelques mots la discussion de ce problème, pour envisager le mouvement sous un autre point de vue.

§ II.

Imaginons un second rectangle $ghkl$ animé d'un mouvement semblable au mouvement défini au commencement de cet article et autour d'un nouveau cercle; le centre du nouveau cercle fixe étant en c, et le centre de rotation en o, un crayon est fixé en un certain point μ du deuxième plan mobile $ghkl$, perpendiculairement à ce plan; il s'agit de trouver la courbe que le crayon décrira sur le premier plan mobile GHKL.

Je suppose qu'à l'origine du temps les deux rectangles ont les positions respectives GHKL et *ghkl*.

Je suppose encore les deux plans parallèles ; et même, pour résoudre la question, on peut regarder les deux plans mobiles comme situés dans un seul et même plan.

Un point fixe (a, b) du premier plan GHKL occupera à l'époque t, par rapport aux axes fixes Ox et Oy, tracés dans le plan du cercle C, une position (x, y) déterminée par les formules

$$(4)\qquad \begin{cases} y \sin\omega t + x \cos\omega t = a - \alpha + \alpha \cos\omega t, \\ y \cos\omega t - x \sin\omega t = b, \end{cases}$$

d'après les conclusions du § I.

Un point fixe (a', b') du deuxième plan *ghkl* occupera à l'époque t par rapport aux axes $o\xi$ et $o\eta$, une position (ξ, η) déterminée par les formules

$$(5)\qquad \begin{cases} \eta \sin\Omega t + \xi \cos\Omega t = a' - \beta + \beta \cos\Omega t, \\ \eta \cos\Omega t - \xi \sin\Omega t = b', \end{cases}$$

Ω étant la vitesse angulaire de rotation de ce deuxième système et $\beta = oc$.

Or si (p, q) sont les coordonnées de o par rapport aux axes Ox et Oy, (m, n) les coordonnées du point (a', b') ou μ par rapport à ces mêmes axes, et (X, Y) les coordonnées par rapport à Ox, Oy du point (ξ, η), on aura

$$\xi = X - p, \quad a' = m - p,$$
$$\eta = Y - q, \quad b' = n - q,$$

les formules (5) deviendront

$$(6)\begin{cases} (Y - q) \sin\Omega t + (X - p) \cos\Omega t = m - p - \beta + \beta \cos\Omega t, \\ (Y - q) \cos\Omega t - (X - p) \sin\Omega t = n - q. \end{cases}$$

Ces équations donneront à l'époque t la position (X, Y)

du point fixe (m, n) du deuxième plan par rapport aux axes Ox et Oy.

Les équations (4) déterminent les coordonnées (x, y) à l'époque t du point du plan mobile GHKL qui avait pour coordonnées (a, b) à l'origine du mouvement, par rapport aux axes fixes Ox et Oy tracés dans le plan du cercle C.

Si l'on change x et y en a et b et réciproquement, on aura les équations suivantes :

$$(7) \quad \begin{cases} b\cos\omega t - a\sin\omega t = y, \\ b\sin\omega t + a\cos\omega t = x - \alpha + \alpha\cos\omega t, \end{cases}$$

qui déterminent les coordonnées *primitives* (x, y) du point mobile qui est en (a, b) à l'époque t; les coordonnées (a, b) étant rapportées aux axes fixes Ox et Oy tracés dans le plan du cercle; les coordonnées (x, y) étant rapportées aux axes Ox_1 et Oy_1 tracés dans le plan GHKL, fixes dans ce plan, mais mobiles avec lui. Si pour point (a, b) on prend (X, Y), les coordonnées (x, y) représentent la position *primitive* (par rapport aux axes Ox et Oy) et *actuelle* (par rapport aux axes $Ox_1\, Oy_1$) du point qui, à l'époque t, se trouve sous le crayon (m, n).

Donc en associant les équations (7) et les suivantes :

$$(8) \quad \begin{cases} (b-q)\sin\Omega t + (a-p)\cos\Omega t = m - p - \beta \\ \qquad\qquad + \beta\cos\Omega t, \\ (b-q)\cos\Omega t - (a-p)\sin\Omega t = n - q, \end{cases}$$

et en éliminant a, b et t, on obtient la courbe décrite par le crayon, fixé en (m, n), sur le plan mobile GHKL et rapportée aux axes mobiles Ox_1 et Oy_1 tracés dans ce plan, qui coïncident avec les axes fixes Ox et Oy à l'origine du mouvement; et, par conséquent, si l'on veut seulement connaître la nature et la forme de cette courbe,

rien ne s'oppose à ce qu'on prenne pour axes Ox et Oy. Éliminons d'abord a et b entre ces équations, on trouvera

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \quad (n-q)\cos kt + (m-p-\beta)\sin kt \\ + \beta\cos\Omega t \sin kt = y - q\cos\omega t + p\sin\omega t \\ -(n-q)\sin kt + (m-p-\beta)\cos kt \\ + \beta\cos\Omega t\cos kt = x - \alpha + \alpha\cos\omega t \\ - q\sin\Omega t - p\sin\omega t, \end{array}\right.$$

où

$$k = \Omega - \omega.$$

En éliminant t entre ces deux équations, on aura la courbe cherchée.

La discussion de ces équations présente des cas nombreux et intéressants.

I.

$$\Omega = 0.$$

Le deuxième plan $hgkl$ est immobile, on a donc la courbe décrite par un crayon présenté au point (m, n) sur le plan HGKL.

Cette hypothèse introduite dans les équations (9) donne

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} m\cos\omega t - m\sin\omega t = y, \\ n\ \sin\omega t + m\cos\omega t = x - \alpha + \alpha\cos\omega t. \end{array}\right.$$

L'élimination de t conduit à l'équation de la courbe décrite

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} \quad [(m-\alpha)^2 + n^2]\, y^2 + 2\alpha n\,(x-\alpha)\, y \\ + (m^2+n^2)(x-\alpha)^2 = [m(m-\alpha) + n^2]^2. \end{array}\right.$$

On voit que c'est une ellipse dont le centre est en C.

C'est en effet le moyen employé par les tourneurs pour décrire des ellipses.

Examinons quelques cas particuliers.

Si l'on suppose $n = 0$, on a une ellipse dont les axes sont dirigés suivant Cx et CY; le grand axe est dirigé suivant CY tant que $m > \frac{\alpha}{2}$; il est dirigé suivant Cx, lorsque $m < \frac{\alpha}{2}$.

Si l'on a, en même temps que $n = 0$,

$$m = 2\alpha,$$

le grand axe est double du petit;

$$m = \alpha,$$

le crayon décrit une droite égale à 2α suivant l'axe CY;

$$m = \frac{\alpha}{2},$$

la courbe décrite est un cercle qui a pour rayon $\frac{\alpha}{2}$;

$$m = 0,$$

le crayon décrit une droite égale à 2α suivant l'axe Cx;

$$m = -\frac{\alpha}{2},$$

le grand axe est triple du petit.

Revenons à l'équation générale (11).

Si l'on prend deux points qui aient respectivement pour coordonnées (m, n) et $(\alpha - m, n)$, les deux ellipses décrites seront égales, mais inversement disposées.

Si $m = \frac{\alpha}{2}$, l'ellipse a ses axes dirigés suivant les bissectrices des angles YCx. Si en même temps

$$n = \pm \frac{\alpha}{2},$$

le crayon décrira suivant les bissectrices deux droites de longueur 2α.

II.

$$\beta = 0, \quad p = 0, \quad q = 0.$$

On a alors un plan tournant autour du point O; il s'agit de trouver la courbe décrite sur le plan CHKL par un crayon fixé au point (m, n) sur le premier plan *ghkl*.

Introduisons ces hypothèses dans les équations (9) et éliminons t; on trouve

$$(12)\quad y = \rho \sin\left\{\gamma + \frac{\Omega - \omega}{\omega} \operatorname{arc}\left[\cos = \frac{-(x-\alpha) \pm \sqrt{\rho^2 - y^2}}{\alpha}\right\}\right];$$

$$m = \rho\cos\gamma, \quad n = \rho\sin\gamma.$$

Cette formule peut se transformer dans la suivante :

$$(13)\quad \begin{cases} x - \alpha = \pm\sqrt{\rho^2 - y^2} \\ \quad - \alpha\cos\left\{\dfrac{\omega}{\Omega - \omega}\left[-\gamma + \operatorname{arc}\left(\sin = \dfrac{y}{\rho}\right)\right]\right\}. \end{cases}$$

Si l'on remonte aux équations qui ont servi pour l'élimination, on en déduira (en remarquant qu'on doit avoir en même temps

$$t = 0, \quad x = m, \quad y = n)$$

que le radical $\sqrt{\rho^2 - y^2}$ ne doit entrer qu'avec le signe $+$ dans les équations (12) et (13).

Si $m = 0$ et $n = 0$, le crayon décrira suivant l'axe des x une longueur égale à 2α.

Examinons quelques cas correspondants aux différentes valeurs du rapport $\frac{\Omega}{\omega}$.

1°.

$$\Omega = \omega.$$

Le crayon décrira une droite égale à 2α parallèle à l'axe des x, et à une distance n de cet axe.

2°.

$$\Omega = 2\omega.$$

La courbe décrite aura pour équation

$$(14)\quad \left\{ \begin{array}{l} [(m-\alpha)^2 + n^2]\,y^2 + 2\alpha n\,(x-\alpha)\,y \\ + (m^2+n^2)\,(x-\alpha)^2 = [\,m\,(m-\alpha) + n^2]^2. \end{array} \right.$$

En comparant cette équation avec l'équation (11), on voit que l'ellipse décrite au moyen de ce mécanisme lorsque

$$\Omega = 2\omega,$$

est égale à l'ellipse décrite par un crayon présenté au point (m, n) à l'origine du mouvement, et qu'elle a la même position dans le plan GHKL ; on reproduira toutes les variétés examinées à cette occasion.

3°.

$$\omega = 2\Omega.$$

Cette hypothèse permet de transformer immédiatement l'équation (13) qui prend alors la forme suivante :

$$(15)\quad \left\{ \begin{array}{l} x - \alpha = \dfrac{\rho^4 - 4\alpha mny}{\rho^4}\sqrt{\rho^2 - y^2} \\ \qquad + \dfrac{\alpha\,(m^2 - n^2)}{\rho^4}\,(\rho^2 - 2y^2), \end{array} \right.$$

où

$$\rho^2 = m^2 + n^2.$$

4°.

$$\Omega = -\omega.$$

Dans ce cas, la formule (13) devient

$$(16)\; x - \alpha = \sqrt{\rho^2 - y^2} - \frac{\alpha}{2\rho}\left[\begin{array}{l} \sqrt{(\rho + m)\left(\rho + \sqrt{\rho^2 - y^2}\right)} \\ + \sqrt{(\rho - m)\left(\rho + \sqrt{\rho^2 - y^2}\right)} \end{array}\right].$$

Si l'on a égard aux formules

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}},$$

$$\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}},$$

où

$$C = \sqrt{A^2 - B},$$

on aura

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} & x - \alpha = \sqrt{\rho^2 - y^2} - \frac{\alpha}{2\rho} \\ & \times \left[\begin{aligned} & \left(\sqrt{\rho+m} + \sqrt{\rho-m}\right)\sqrt{\frac{\rho+y}{2}} \\ & + \left(\sqrt{\rho+m} - \sqrt{\rho-m}\right)\sqrt{\frac{\rho-y}{2}} \end{aligned} \right]; \end{aligned} \right.$$

les radicaux étant pris avec les signes dont ils sont affectés. Sous cette forme, l'équation de la courbe se prête à une discussion facile.

Lorsque

$$\Omega = i\omega,$$

i étant un nombre entier positif ou négatif, l'équation (13) devient algébrique ; mais je me dispenserai de reproduire les calculs, qui me semblent fort compliqués.

III.

$$\beta = 0.$$

On a un plan tournant uniformément autour du point fixe (p, q); il s'agit de trouver la courbe décrite sur le plan mobile GHKL par un crayon fixé au point (m, n) sur le premier plan.

On a les équations suivantes entre lesquelles il faut éli-

miner la variable t,

$$(18)\quad \begin{cases} (n-q)\cos(\Omega-\omega)t+(m-p)\sin(\Omega-\omega)t \\ = y - q\cos\omega t + p\sin\omega t \\ -(n-q)\sin(\Omega-\omega)t+(m-p)\cos(\Omega-\omega)t \\ = x-\alpha+\alpha\cos\omega t - q\sin\omega t - p\cos\omega t. \end{cases}$$

On pourrait effectuer l'élimination de t, mais les calculs seraient fort compliqués. Je me contenterai d'examiner les cas particuliers les plus simples.

1°.

$$m=p, \quad n=q.$$

On arrive au même résultat qu'en présentant un crayon au point (p, q) à l'origine du mouvement sur le plan HGKL, ce que l'on voit à priori.

2°.

$$q=0, \quad p=\alpha.$$

Le centre de rotation du plan *ghkl* est au point C. L'élimination de t conduit à l'équation suivante :

$$(19)\quad x-\alpha = r\cos\left\{\gamma+\frac{\Omega-\omega}{\omega}\operatorname{arc}\left[\sin=\frac{-y+\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}}{\alpha}\right]\right\},$$

où l'on a posé

$$m-\alpha=r\cos\gamma,$$
$$n=r\sin\gamma,$$

équation qui a une grande analogie avec l'équation (12) et qu'on peut soumettre aux mêmes hypothèses et aux mêmes transformations.

3°.

$$\Omega=\omega.$$

On est conduit à l'équation

$$(20)\quad \begin{cases} [(p-\alpha)^2+q^2]Y^2+2\alpha qXY+(p^2+q^2)X^2 \\ = [p(p-\alpha)+q^2]^2, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$X = x - \alpha - (m - p),$$
$$Y = y - (n - q).$$

Remarquons que la grandeur de l'ellipse ne dépend que de la position du centre de rotation (p, q) ; et quelle que soit la position du crayon en (m, n), on décrira toujours la même ellipse pour les mêmes valeurs de p et q; il n'y aura de variable que le centre de la courbe et la direction de ses axes.

Si $q = 0$, l'ellipse se trouve rapportée à ses axes.

4°.

$$\Omega = 2\omega.$$

L'équation de la courbe décrite sera

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &[n - 2q)^2 + (m - \alpha)^2]\, y^2 \\ &+ 2[4pq + n\alpha - 2qm - 2pn]\, y\,(x - \alpha) \\ &+ [n^2 + (m - 2p)^2]\,(x - \alpha)^2 \\ &= [n\,(n - 2q) + (m - \alpha)\,(m - 2p)]^2. \end{aligned}\right.$$

Dans ce cas, la grandeur de l'ellipse dépend de la position du centre de rotation et de la position du crayon.

Lorsque

$$m = 2p \quad \text{et} \quad n = 2q,$$

on a une droite dont l'équation est

$$y = \frac{2q}{2p - \alpha}\,(x - \alpha)$$

et dont la longueur est

$$2\sqrt{(2p - \alpha)^2 + 4q^2}.$$

Les valeurs

$$n = 0,$$
$$m = 2p,$$

ou

$$n = 2q,$$
$$m = \alpha$$

donnent les droites

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad x = \alpha.$$

Lorsque le centre de rotation (p, q) est quelconque, et qu'on place le crayon en un point déterminé par les valeurs

$$\left(m = p + \frac{\alpha}{2}, \quad n = q\right),$$

la courbe décrite sera un cercle qui a pour équation

$$y^2 + (x - \alpha)^2 = \left(p - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + q^2.$$

Si on laisse la position (m, n) du crayon arbitraire, on aura un cercle lorsque le centre de rotation aura pour coordonnées

$$q = 0,$$
$$p = \frac{\alpha}{2}$$

ou

$$q = n,$$
$$p = m - \frac{\alpha}{2}.$$

Dans ces deux cas, qui sont les seuls, le cercle aura pour équation

$$y^2 + (x - \alpha)^2 = n^2 + (m - \alpha)^2.$$

IV.

Abordons le cas général où la quantité β n'est pas nulle. La solution de la question sera donnée par les équations (9).

Laissant de côté un certain nombre de cas où l'élimination est possible, mais compliquée, je n'examinerai que deux hypothèses particulières.

1°.

$$2p = \alpha, \quad q = 0.$$

On trouve

$$\cos 2\omega t = \frac{-(m - \alpha - \beta) + \sqrt{y^2 + (x - \alpha)^2 - n^2}}{\beta}.$$

Il est alors facile d'avoir l'équation de la courbe et de discuter les différents cas relatifs aux hypothèses qu'on peut faire sur les paramètres m, n et β.

2°.

$$\Omega = \omega.$$

La courbe décrite est une ellipse qui a pour équation

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \quad [q^2 + (p - \alpha + \beta)^2]\,Y^2 + 2q(\alpha - \beta)\,XY \\ + (p^2 + q^2)\,X^2 = [q^2 + p(p - \alpha + \beta)]^2, \end{array} \right.$$

où l'on a posé

$$X = x - \alpha + \beta - (m - p),$$
$$Y = y - (n - q).$$

La grandeur de ces ellipses ne dépend que de la position du centre de rotation (p, q) et des paramètres α et β.

Si $\alpha = \beta$, on a un cercle dont le rayon est constant pour toutes les valeurs de m et n. Si $p = 0$ et $q = 0$, ce cercle se réduit à un point.

Ne voulant pas donner trop d'extension à cet article, je n'entrerai pas dans plus de détails sur ces questions.

Note du Rédacteur. Familiarisé avec les considérations cynématiques et les procédés de la géométrie descriptive, le savant professeur se propose de publier une

nouvelle édition de l'*Art du tourneur* de Bergeron. Sorti de mains si habiles, un tel ouvrage sera recherché par les artistes, les technologues et les géomètres.

QUESTIONS.

321. Dans un hexagone *gauche* ayant les côtés *opposés* égaux et parallèles, les milieux des côtés sont dans un même plan.

322. Dans un polygone *gauche* d'un nombre *pair* de côtés, ayant les côtés opposés égaux et parallèles, les droites qui joignent les sommets opposés et celles qui joignent les milieux des côtés opposés passent par un seul et même point.

323. Deux cercles étant dans un même plan et les tangentes communes intérieures se coupant à angle droit, l'aire du triangle formé par ces tangentes et une tangente commune extérieure est équivalente au rectangle des rayons.

THÉORÈMES SUR LES ERREURS RELATIVES;

PAR M. JAUFROID,
Professeur à Toulon.

On démontre que si sur la gauche d'un nombre on prend un certain nombre de chiffres à partir du premier chiffre significatif, en remplaçant par des zéros les unités des différents ordres qu'on néglige, on fait une erreur relative plus petite qu'une fraction ayant pour numéra-

teur l'unité et pour dénominateur le premier chiffre significatif à gauche suivi d'autant de zéros qu'il y a de chiffres conservés moins un, et dans tous les cas plus petits qu'une décimale d'un ordre marqué par le nombre des chiffres conservés moins un, et plus petite qu'une demi-décimale de ce même ordre si le premier chiffre significatif à gauche est différent de l'unité.

Ce que nous voulons remarquer, c'est que ces trois limites existent encore lorsqu'on force l'unité sur le premier chiffre conservé à droite; cela tient à ce que l'erreur absolue a la même limite supérieure que dans le premier cas.

En effet, soit 63,789; on prend 63,8, on a

$$\text{erreur absolue} = 0{,}011 < 1 \text{ dixième},$$

$$\text{erreur relative} = \frac{0{,}011}{63{,}789} < \frac{1 \text{ dixième}}{600 \text{ dixièmes}} < \frac{1}{600},$$

d'où l'on tire les trois limites citées précédemment.

Cette remarque sert à établir le théorème suivant :

Si N' représente un nombre N avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$, par exemple, et *en moins*, on pourra dans le développement de N' s'arrêter au quatrième chiffre significatif à gauche en le forçant d'une unité, et on aura encore le nombre N avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$, mais en plus ou en moins.

Soit 37,4875 la valeur de N approchée en moins avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$. On a

$$37{,}4875 < N < 37{,}4875 + \frac{N}{1000}.$$

Mais, d'après la remarque faite précédemment, si sur la

gauche de 37,4875 je prends les quatre premiers chiffres significatifs en forçant le dernier d'une unité, le nombre 37,49 représente 37,4875 avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$, mais en plus; on a donc

$$37,4875 < 37,49 < 37,4875 + \frac{37,4875}{1000},$$

à fortiori

$$37,4875 < 37,49 < 37,4875 + \frac{N}{1000},$$

car on a

$$N > 37,4875$$

par hypothèse.

Il suit de là que les deux nombres N et 37,49 sont compris entre deux limites qui diffèrent de $\frac{N}{1000}$; ils diffèrent donc entre eux de moins de $\frac{N}{1000}$, c'est-à-dire que 37,49 représente N avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$, mais en plus ou en moins.

Application. Calculer avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$ le carré du rayon du cercle dont la surface est $\sqrt{2}$.

On a

$$R^2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

3,141 est en moins le dividende avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1000}$.

1,4142 étant les cinq premiers chiffres de $\sqrt{2}$, 1,4143

est en plus le diviseur avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{10000}$, à fortiori plus petite que $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1000}$.

On a donc pour R^2, en moins et avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$, la fraction $\frac{3,141}{1,4143}$,

On trouve pour les quatre premiers chiffres de son développement 2,220; donc 2,221 représente le carré du rayon avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$, mais en plus ou en moins.

SOLUTION DE LA QUESTION 318 (CHASLES);

PAR M. FÉLIX LUCAS,
Élève de l'École Polytechnique.

1°. La courbe à double courbure du quatrième ordre provenant de l'intersection de deux cônes de révolution dont les axes sont parallèles, est telle, que la somme des distances de chacun de ses points aux sommets des deux cônes, multipliés respectivement par des constantes, est constante. Cette courbe, comme les ovales de Descartes, a un troisième foyer.

Considérons les axes comme verticaux.

Lemme. La courbe d'intersection de deux cônes de révolution dont les axes sont verticaux est sur un troisième cône de révolution dont l'axe est aussi vertical (*voir* plus bas).

En coupant les deux cônes par le plan de leurs axes, j'obtiens deux couples de droites (A, B), (A', B') également inclinées sur la verticale. Je regarde ces droites comme côtés opposés d'un quadrilatère dont je construis

les diagonales A'' et B''. Il est facile de reconnaître, d'après les propriétés du quadrilatère, que A'' et B'' sont également inclinés sur la verticale (*Géom. sup.*, n° 348); je puis donc les regarder comme la section méridienne d'un cône circulaire droit et vertical. Or les trois cônes (A, B), (A', B'), (A'', B'') se coupent deux à deux suivant la même courbe.

Pour le prouver, menons un plan horizontal quelconque, et désignons par LT sa trace sur le tableau. Les six droites A, B, A', B', A'', B'' coupent LT aux points (a, b), (a', b'), (a'', b'') qui forment trois couples en involution, puisque ces droites sont les côtés et les diagonales d'un quadrilatère (*Géom. sup*, n° 339). Les cercles décrits sur les diamètres a, b, a', b', a'', b'' dans le plan horizontal représentent les sections faites par ce plan dans les trois cônes; mais à cause de l'involution des six points, ces trois cercles ont une corde commune (*Géom. sup*, n° 302); les extrémités de cette corde sont les intersections de notre plan horizontal avec la courbe d'intersection de deux quelconques des trois cônes.

Comme cela a lieu quel que soit le plan horizontal que l'on considère, on en conclut que les trois cônes se coupent deux à deux suivant la même courbe.

Cela posé, j'appelle

S et S' les sommets des deux cônes donnés;

S'' le sommet du cône auxiliaire;

$\alpha, \alpha', \alpha''$ les demi-angles au sommet des trois cônes;

d et d_1 les distances verticales S, S' et S, S''.

Si je coupe les trois cônes par un plan horizontal mené à la distance variable h du point S, les points de la courbe commune aux trois cônes que contiendra ce plan ont pour distances aux trois sommets les longueurs

$$\delta = \frac{h}{\cos\alpha}, \quad \delta' = \frac{h-d}{\cos\alpha'}, \quad \delta'' = \frac{h-d_1}{\cos\alpha''}.$$

On a donc

$$\delta - \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}\delta' = \frac{d}{\cos\alpha},$$

$$\delta - \frac{\cos\alpha''}{\cos\alpha}\delta'' = \frac{d_1}{\cos\alpha},$$

$$\delta' - \frac{\cos\alpha''}{\cos\alpha'}\delta'' = \frac{d_1 - d}{\cos\alpha'},$$

et, par conséquent, les trois sommes

$$\delta - \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}\delta', \quad \delta - \frac{\cos\alpha''}{\cos\alpha}\delta'', \quad \delta' - \frac{\cos\alpha''}{\cos\alpha'}\delta'',$$

sont constantes quel que soit h, c'est-à-dire constantes pour tous les points de la courbe.

On conclut de là que S, S′, S″ sont les trois foyers de la courbe.

2°. Le lemme sur lequel je m'appuie est une conséquence du théorème suivant :

Quand deux cônes du deuxième degré ont une direction cyclique commune et leurs axes (lieux des centres des sections circulaires) situés dans un même plan, leur courbe d'intersection peut être placée sur un troisième cône du deuxième degré ayant son axe dans le plan de leurs axes, et un de ses plans cycliques parallèles à leur direction cyclique commune.

L'axe de ce nouveau cône s'obtient en joignant le point de concours des axes des deux cônes donnés au point d'intersection des deux diagonales du quadrilatère qui résulte des sections faites dans les deux cônes par le plan de leurs axes; et ces deux diagonales sont elles-mêmes la section du cône auxiliaire par le plan dont nous parlons.

SUR LES Nos 170 ET 652 DE LA GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE;

PAR M. DE JONQUIÈRES.

Si deux rayons Am, Bm pivotent autour de deux points fixes A et B d'un cercle en se coupant constamment en un point m de la circonférence, ils marquent sur une tangente au cercle deux divisions homographiques dont les deux *points doubles* coïncident avec le point de contact de la tangente.

Si l'on fait la perspective de la figure de manière que ce point de contact passe à l'infini, le cercle devient une hyperbole et la tangente une asymptote. Les deux divisions homographiques ont leurs points doubles coïncidents à l'infini. Donc (170) :

Si deux rayons Am, Bm *pivotent autour de deux points fixes d'une hyperbole, en se coupant constamment en un point* m *de la courbe, le segment qu'ils interceptent sur une asymptote a une longueur constante.*

On en déduit un mode de génération de l'hyperbole et un moyen de construire la tangente au point A ou au point B.

2°. On a (*Géom. sup.*, n° 652) ce théorème général :

Si l'on a des angles (A, A'), (B, B'), (C, C'), etc., *tous de même grandeur et formés dans le même sens de rotation à partir de leurs origines, mais placés d'une manière quelconque, leurs côtés forment sur la droite située à l'infini deux divisions homographiques.*

Supposons que tous les premiers côtés de ces angles A, B, C, etc., passent par un point fixe P, ces côtés marqueront, sur une transversale quelconque L, une divi-

sion homographique à celle qu'ils marquent sur la droite de l'infini. Supposons encore que les sommets a, b, c, etc., des angles, au lieu d'être situés d'une manière quelconque, soient sur cette transversale L ; ils y forment, comme on vient de le dire, une division homographique à celle que les côtés A, B, C, etc., forment sur la droite de l'infini, donc aussi homographique à celle formée à l'infini par les seconds côtés A', B', C', etc., qui joignent, deux à deux, les points homologues de deux divisions homographiques décrites, l'une sur L, l'autre sur la droite de l'infini enveloppant une conique (n° 549).

Quand le sommet de l'angle mobile est à l'infini sur L, le second côté M' est tout entier à l'infini. Or le côté est une tangente ; donc la conique est une parabole qui est évidemment tangente à L. On a ainsi une démonstration extrêmement simple de ce théoreme connu : *Si le sommet d'un angle de grandeur constante parcourt une droite, pendant qu'un de ses côtés tourne autour d'un point fixe, son autre côté enveloppe une parabole tangente à la droite parcourue par le sommet de l'angle.*

PROBLÈME SUR SEPT PLANS;

Par M. POUDRA.

Lemme. Par une droite et six points faire passer un hyperboloïde.

Désignons la droite par L et les six points par les lettres a, b, c, d, e, f.

Par la droite L et les cinq points a, b, c, d, e faisons passer cinq plans. En les coupant par un plan quelconque, on obtiendra un faisceau de cinq droites.

Joignons le point f aux points a, b, c, d, nous aurons

quatre droites qu'on peut considérer comme les arêtes d'un cône. Coupons ce cône par un plan, nous aurons quatre points de sa base. On fera passer par ces quatre points une section conique telle, qu'un point de cette courbe joint à ces quatre points donne un faisceau de quatre droites homographiques avec le faisceau des quatre premiers plans ci-dessus passant par la droite L et par *a*, *b*, *c*, *d*. Cette courbe sera la base du cône.

Formons de même un second cône ayant même sommet *f*, et faisons la même opération que ci-dessus, en prenant les points *a*, *b*, *c*, *e*.

Les deux cônes de même sommet *f*, ayant trois arêtes *fa*, *fb*, *fc* communes, se couperont en une seule et même arête qui sera telle, que les plans passant par cette droite et par les cinq points *a*, *b*, *c*, *d*, *e* formeront un faisceau homographique avec celui qui passe par L et les mêmes points; donc, d'après un théorème connu, les plans de ces deux faisceaux se couperont respectivement suivant un hyperboloïde passant par les six points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* et par la droite L. Le problème est donc résolu.

Corollaire. Si, en conservant la droite L et les cinq points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, on fait varier le point *f*, on obtiendra pour chaque position un hyperboloïde différent et qui tous auront en commun les cinq points *a*, *b*, *c*, *d*, *e* et la droite L.

On peut en conclure que si deux hyperboloïdes ont cinq points communs, ils se coupent encore suivant une seule et même droite.

Problème. *On donne sept points sur une droite formant une division quelconque. On donne dans l'espace sept plans. On demande de déterminer une transversale qui soit coupée par les sept plans en sept points formant sur cette droite une division homographique à la première.*

Ce problème me semble difficile à attaquer par l'analyse. En voici une solution géométrique fondée sur les notions des fonctions anharmoniques.

Par une transformation polaire, on peut substituer à cette question la suivante :

On donne un faisceau de sept plans désignés par A, B, C, D, E, F, G passant par conséquent par une même droite L; on donne dans l'espace sept points désignés par a, b, c, d, e, f, g. On demande de faire passer par ces sept points un faisceau de sept plans homographiques au faisceau donné.

Considérons d'abord les six points a, b, c, d, e, f et cherchons le lieu géométrique d'une droite telle, que les six plans passant par cette droite et les six points forment un faisceau homographique à celui qui passe par la droite L et par les six plans A, B,..., F. Ce lieu sera évidemment un hyperboloïde passant par ces six points.

Pour déterminer cet hyperboloïde, prenons un des points a pour le sommet d'un cône passant par les quatre points b, c, d, e; coupons les quatre arêtes ab, ac, ad, ae par un plan quelconque, nous aurons quatre points par lesquels nous ferons passer une conique telle, qu'un point de cette courbe jointe à ces quatre points donne un faisceau de quatre droites homographiques avec celui des quatre plans B, C, D, E. On regardera cette section conique comme la base d'un cône de sommet a et passant par les points b, c, d, e.

Déterminons ensuite un deuxième cône de même sommet a et faisons la même opération, mais en prenant les points b, c, d, f.

Les deux cônes de même sommet a ayant trois arêtes communes ab, ac, ad, se couperont suivant une autre et unique arête qui sera telle, que les plans passant par les cinq points b, c, d, e, f et par cette droite formeront

un faisceau homographique avec celui qui est formé par les cinq plans B, C, D, E, F.

Par cette droite, menons encore un sixième plan, et tel, que les six plans forment un faisceau homographique à celui des six plans A, B, C, D, E, F. Ce sixième plan sera le plan tangent à l'hyperboloïde en un point de cette droite.

Par un autre point *f* de ceux donnés, déterminons de même la droite par laquelle faisant passer six plans par les points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, ils forment un faisceau aussi homographique à celui formé par ceux A, B, C, D, E, F et, par conséquent, au faisceau formé ci-dessus. Or les deux faisceaux de plans étant homographiques, il en résultera que leurs plans respectifs se rencontreront deux à deux suivant les génératrices de l'hyperboloïde cherché. Pour avoir d'autres génératrices de cette surface, il suffira de faire passer par les axes de ces deux faisceaux une suite de couples de plans homographiques.

On peut construire de même un deuxième hyperboloïde passant par les six points *a*, *b*, *c*, *d*, *e* et *g* et tel, que les six plans passant par une quelconque de ses arêtes et par ces six points forment un faisceau homographique à celui des six plans A, B, C, D, E, G.

On aura alors deux hyperboloïdes ayant de commun les cinq points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Ils se couperont suivant une seule et même génératrice qui sera l'axe du faisceau cherché (lemme) qui doit passer par les sept points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* et être homographique à celui des sept plans A, B, C, D, E, F, G.

SUR LES QUATRE SYSTÈMES DE COORDONNÉES ASTRONOMIQUES.

Extrait de l'*Astronomie sphérique* de Brünnow (*).

1er SYSTÈME. — HAUTEUR ET AZIMUT.

1°. *Deux coordonnées sphériques rectangulaires.*

Par l'astre et le zénith du lieu d'observation, on fait passer un grand cercle nommé *cercle vertical* de l'astre; la portion de cet arc (moindre que 180 degrés) comprise entre l'astre et le zénith se nomme distance *zénithale*, et la portion entre l'astre et l'horizon est la *hauteur* de l'astre : ces deux distances font toujours ensemble 90 degrés. Par le zénith et l'axe du monde, on fait passer un grand cercle qui coupe l'horizon en deux points *nord* et *sud*. L'arc de l'horizon compris entre le point sud et le cercle vertical de l'astre est l'*azimut* de l'astre. Cet azimut se compte de 0 à 360 degrés dans le sens du mouvement diurne de la Terre, de gauche à droite en regardant le nord.

Observation. On a des instruments pour mesurer à la fois la hauteur et l'azimut, d'autres pour les hauteurs seulement; ce sont des quarts de cercles, des sextants ou des cercles entiers; les instruments avec lesquels on ne mesure que les azimuts se nomment *théodolites*.

(*) Actuellement professeur à l'université du Michigan en Amérique. La traduction de son ouvrage est terminée.

2°. *Trois coordonnées rectilignes rectangulaires.*

Le plan de l'horizon est celui des x, y; la partie *positive* de l'axe des x est dirigée vers l'origine des azimuts, et la partie *positive* de l'axe des y vers l'azimut de 90 degrés; la partie *positive* de l'axe des z vers le pôle nord. On a

$$x = \cos h \cos A, \quad y = \cos h \sin A, \quad z = \sin h,$$

où h est la hauteur de l'astre et A son azimut.

2ᵉ SYSTÈME. — ANGLE HORAIRE ET DÉCLINAISON.

1°. *Deux coordonnées sphériques.*

Un grand cercle passant par l'astre et l'axe du monde se nomme *cercle horaire;* le grand cercle qui passe par l'axe du monde et le zénith se nomme *méridien;* l'angle formé par ces deux plans est l'*angle horaire* de l'étoile: il se compte à partir du méridien de 0 à 360 degrés dans le sens du mouvement diurne de la Terre. La partie du cercle horaire comprise entre l'astre et l'équateur est la *déclinaison* de l'astre, et la partie entre l'astre et le pôle nord est la *distance polaire* de l'astre. La déclinaison positive dans l'hémisphère boréal est négative dans l'hémisphère austral. Ces deux données, angle horaire et déclinaison, déterminent la position de l'astre.

2°. *Trois coordonnées rectangulaires.*

L'équateur est le plan des x, y; la partie positive de l'axe des x est dirigée vers le point d'intersection de l'équateur et du méridien qui correspond à un angle horaire nul; la partie positive de l'axe des y est dirigée vers le point de l'équateur qui répond à un angle horaire de 90 degrés; l'axe des z est l'axe du monde dirigé vers le pôle

nord, et l'on a

$$x' = \cos\delta \cos t, \quad y' = \cos\delta \sin t, \quad z' = \sin\delta,$$

où δ est la déclinaison et t l'angle horaire.

3e SYSTÈME. — DÉCLINAISONS ET ASCENSIONS DROITES.

1°. *Deux coordonnées sphériques.*

Dans le système précédent, la déclinaison est constante; mais la seconde coordonnée, l'angle horaire, varie à chaque instant. Pour rendre cette coordonnée constante, on a pris un point fixe dans l'équateur; c'est le point d'équinoxe vernal. La distance de ce point à celui où le cercle horaire de l'astre coupe l'équateur se nomme l'*ascension droite* de l'astre; elle se compte de 0 à 360 degrés d'occident en orient, dans le sens du mouvement diurne de la Terre. Dans ce système, les deux coordonnées, déclinaison et ascension droite, sont constantes.

Observation. L'équatorial, ou instrument parallactique, et la pendule servent à trouver les coordonnées du deuxième et du troisième système.

2°. *Trois coordonnées rectilignes rectangulaires.*

Le plan de l'équateur est encore celui des x, y; la partie positive de l'axe des x est dirigée vers le point d'équinoxe vernal où l'ascension droite est nulle, et la partie positive de l'axe des y vers le point où l'ascension droite est de 90 degrés; l'axe des z est l'axe du monde dirigé vers le pôle nord, et l'on a

$$x'' = \cos\delta \cos\alpha, \quad y'' = \cos\delta \sin\alpha, \quad z'' = \sin\delta,$$

où δ est la déclinaison et α l'ascension droite.

4e SYSTÈME. — LONGITUDE ET LATITUDE.

1°. *Deux coordonnées sphériques.*

Les grands cercles passant par les pôles de l'écliptique se nomment *cercles de latitudes*. L'arc d'un tel cercle passant par l'astre, compris entre l'astre et l'écliptique, est la latitude de l'astre; elle est positive lorsque l'étoile et le pôle nord sont dans le même hémisphère formé par l'écliptique et négative lorsque l'astre est dans le second hémisphère. C'est une première coordonnée. L'arc de l'écliptique compris entre le point d'équinoxe vernal et le cercle de latitude est la longitude de l'astre; c'est la seconde coordonnée et se compte de 0 à 360 degrés dans le sens du mouvement diurne de la Terre.

2°. *Trois coordonnées rectilignes rectangulaires.*

Le plan de l'écliptique est le plan des xy; la partie positive de l'axe des x est dirigée vers le point d'équinoxe vernal; la partie positive de l'axe des y vers le point qui a 90 degrés de longitude; la partie positive de l'axe des z perpendiculaire à l'écliptique dirigé vers l'hémisphère où est le pôle nord.

$$x''' = \cos\beta \cos\lambda, \quad y''' = \cos\beta \sin\lambda, \quad z''' = \sin\beta,$$

où β est la latitude et λ la longitude de l'étoile.

CONVERSION DES COORDONNÉES D'UN SYSTÈME DANS LES COORDONNÉES D'UN AUTRE SYSTÈME.

A. *Conversion du premier système dans le second.*

Considérons le triangle formé par le pôle P, le zénith Z et l'étoile E; on a

$$PZ = 90^\circ - \varphi,$$

où φ est la hauteur du pôle,

$$PE = 90^\circ - \delta, \quad EZ = 90^\circ - h,$$
$$P = t, \quad Z = 180^\circ - A.$$

E = angle à l'astre, *angle parallactique*. On a, d'après les formules connues,

$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos A,$$
$$\sin\delta \cos t = \cos h \sin A,$$
$$\cos\delta \cos t = \sin h \cos\varphi + \cos h \sin\varphi \cos A.$$

Faisant

$$\sin h = m \cos M,$$
$$\cos h \cos A = m \sin M,$$

les formules adaptées au calcul par logarithmes deviennent

$$\sin\delta = M \sin(\varphi - M),$$
$$\sin\delta \cos t = \cos h \sin A,$$
$$\cos\delta \cos t = m \cos(\varphi - M).$$

A'. *Deuxième système dans le premier.*

Le même triangle donne

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t,$$
$$\cos h \sin A = \cos\delta \sin t,$$
$$\cos h \cos A = - \cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t.$$

Faisons

$$\cos\delta \cos t = m \cos M,$$
$$\sin\delta = m \sin M,$$

on a

$$\sin h = m \cos(\varphi - M),$$
$$\cos h \sin A = \cos\delta \sin t,$$
$$\cos h \cos A = m \sin(\varphi - M).$$

B. *Conversion du troisième dans le quatrième système.*

Considérons le triangle formé par le pôle P′ de l'écliptique, le pôle P de l'équateur et l'astre E, on a

$$PP' = \varepsilon = \text{obliquité de l'écliptique},$$
$$PE = 90^\circ - \delta,$$
$$P'E = 90^\circ - \beta,$$
$$P = 90^\circ + \alpha,$$
$$P' = 90^\circ - \alpha,$$
$$E = \text{angle à l'astre};$$

d'où

$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha,$$
$$\cos\beta\sin\lambda = \cos\delta\cos\alpha\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon,$$
$$\sin\beta = -\cos\delta\sin\alpha\sin\varepsilon + \sin\delta\cos\varepsilon.$$

Faisant

$$M\sin N = \sin\delta,$$
$$M\cos N = \cos\delta\sin\alpha,$$

on obtient

$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha,$$
$$\cos\beta\sin\lambda = M\cos(N - \varepsilon),$$
$$\sin\beta = M\sin(N - \varepsilon).$$

B′. *Conversion du quatrième dans le troisième système.*

Même triangle que ci-dessus.

$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda,$$
$$\cos\delta\sin\alpha = \cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon,$$
$$\sin\delta = \cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon + \sin\beta\cos\varepsilon.$$

Faisant

$$\operatorname{tang} N = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\lambda},$$

on obtient

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\cos(N + \varepsilon)}{\cos N}\operatorname{tang}\lambda,$$
$$\operatorname{tang}\delta = \operatorname{tang}(N + \varepsilon)\sin\alpha.$$

Observation. La conversion du premier système dans le quatrième et *vice versâ* n'est pas usitée.

Relations entre les diverses coordonnées rectangulaires (*voir* ci-dessus).

$$
\begin{aligned}
x &= \cos A \cos h,\\
y &= \sin A \cos h,\\
z &= \sin h,\\
x' &= z \sin\varphi + z \cos\varphi,\\
y' &= y,\\
z' &= z \sin\varphi - x \cos\varphi,\\
x'' &= x' \cos\Theta + y' \sin\Theta,\\
y'' &= y' \cos\Theta - x' \sin\Theta,\\
z'' &= z',
\end{aligned}
$$

où

$$\Theta = \alpha + t = \text{temps sidéral}.$$

$$
\begin{aligned}
x''' &= x'',\\
y''' &= y'' \cos\varepsilon + z'' \sin\varepsilon,\\
z''' &= - y'' \sin\varepsilon + z'' \cos\varepsilon,\\
x''' &= \cos\beta \cos\lambda,\\
y''' &= \cos\beta \sin\lambda,\\
z'' &= \sin\beta.
\end{aligned}
$$

Exemple (B) :

$\alpha = 6^\circ\, 33'\, 29'',30$, $\delta = -16^\circ\, 22'\, 35'',45$, $\varepsilon = 22^\circ\, 27'\, 31'',72$.

On trouve

$$
\begin{aligned}
\log \cos\beta \sin\lambda &= 8.0689241_n\\
\log \cos\delta \sin\alpha &= \underline{9.0397224}\\
&\quad\; 9.0292017_n
\end{aligned}
$$

Exemple (A) :

$\varphi = 52^\circ\, 30'\, 16'',0$, $h = 16^\circ\, 11'\, 4'',0$, $A = 202^\circ\, 4'\, 15'',5$.

On trouve

$$\delta = +49^\circ\, 43'\, 46'',0, \quad t = 223^\circ\, 56'\, 2'',22.$$

OBSERVATION SUR UN PASSAGE DE L'ALGÈBRE DE M. BERTRAND (2e édition).

C'est à la page 9, § 7. Voici l'énoncé.

« La forme des résultats précédents peut se simplifier » à l'aide d'une *convention* très-utile en algèbre, qui » consiste à regarder tous les termes d'un polynôme » comme *ajoutés* les uns aux autres, en nommant nom- » bres *négatifs* ceux qui sont précédés du signe —. Par » exemple, on regardera la différence $a - b$ comme ré- » sultant de l'addition de a avec $-b$.

[1] $$a - b = a + (-b);$$

» l'expression isolée $(-b)$ n'acquiert pour cela aucune » signification ; seulement on dit ajouter $-b$, au lieu de » dire retrancher b. On convient de même que retran- » cher $-b$ signifie ajouter b.

[2] $$a - (-b) = a + b.$$

» Il serait absurde de chercher à démontrer les formu- » les (1) et (2) : les définitions ne se démontrent pas. »

Certes on a le droit d'établir des conventions dès qu'elles n'influent pas sur le résultat ; dès que cette influence existe, ce droit cesse. C'est précisément ce qui a lieu ici ; $+(-b)$ égale $-b$, $-(-b)$ égale $+b$ sont des résultats. Si vous en faites des conventions, on pourrait en établir d'autres et d'un sens entièrement opposé. Que devient alors la certitude mathématique ? Sans doute les définitions ne se démontrent pas, mais il serait par

trop commode, pour se dispenser de démontrer une proposition, de la convertir en définition.

Ces *conventions* sont un échafaudage superflu, d'aucune nécessité pour construire la science. On évite cet embarras en se rappelant sans cesse que l'algèbre est une *arithmétique universelle,* indépendante de tout système de numération, et que l'arithmétique a pour but *unique* d'apprendre à compter soit en avant, soit en arrière, et de parvenir au résultat final par la voie la plus courte.

Pour donner du corps à cette pensée, imaginons une droite indéfinie; plaçons sur cette droite une infinité de boules égales; désignons une quelconque d'entre elles par la lettre Z, et chacune de celles qui sont à la droite de Z par D et à la gauche de Z par G. Lorsqu'en comptant on s'éloigne de Z dans la direction de D, l'opération se désigne par ce signe +; si c'est dans la direction de G, par le signe —.

Ainsi $+a-b$ désigne une double opération; on compte a boules dans la direction D, et, arrivé à la fin, on rétrograde de b boules dans la direction G.

$$+(+a-b)+(+c-d)$$

signifie : 1° la double opération $+a-b$, premier résultat; 2° la double opération $+c-d$, deuxième résultat; 3° l'opération + sur le premier résultat et l'opération + sur le second résultat. Ces quatre opérations se réduisent aussi à celle-ci

$$+a-b+c-d;$$

de même

$$+(+a-b)-(+c-d)$$

se réduit à

$$+a-b-c+d.$$

Cette représentation figurée suffit pour tout expliquer

Il faut d'ailleurs remarquer qu'on n'opère réellement jamais que sur des nombres entiers. $\frac{7}{3}$ est la même chose que le nombre 7, excepté que l'unité de ce nombre, au lieu d'être représentée par 1, est représentée par $\frac{1}{3}$.

A la page 19, à propos de la multiplication, on trouve encore une *convention*. Que dirait Leibnitz d'une mathématique conventionnelle ?

Si l'on obligeait les géomètres à expliquer ce qu'ils veulent faire, il n'y aurait jamais de difficulté sur le sens des opérations. Je veux multiplier $-a$ par $-b$, qu'entendez-vous par là?

A quel propos applique-t-on ci-dessus l'épithète de *négatifs* aux nombres précédés du signe —; en quoi sont-ils moins *affirmatifs* que les nombres précédés du signe +? C'est qu'on veut obvier, à la page 9, à une difficulté qui ne se présente qu'à la page 10. En bonne logique, dans les ouvrages élémentaires, il ne faut jamais définir un objet, expliquer une difficulté avant que l'objet, la difficulté aient pris naissance. Et c'est pourtant ce qu'on fait toujours; *inde labes*.

Pour les imaginaires, l'auteur a encore recours à une *convention*. Il ne s'agit pourtant que d'un signe *mnémonique*. $\sqrt{-1}$ rappelle que dans l'équation

$$x^2 + 1 = 0$$

il faut remplacer x^2 par -1, ce qui est évident. Le grand Euler lui-même s'est trompé en cet endroit. Au numéro 148 de ses *Éléments*, il met

$$\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{6},$$

et déjà Bombelli, le créateur du calcul des imaginaires,

donne l'équation vraie

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = - \sqrt{ab},$$

et avant lui Cardan se sert de l'expression *moins sophistiqués* pour désigner les racines imaginaires, et, appelant les quantités négatives simples des *moins purs*, il déclare que les *sophistiqués* sont d'*inutiles subtilités*. Nouvel exemple de la réserve qu'il faut mettre dans ces déclarations d'utilité et d'inutilité dont sont si prodigues les hommes qui croient εἶναί τι. Aujourd'hui les imaginaires, avec les déterminants et les infiniment petits, forment la partie la plus importante, la plus féconde de toutes les branches de l'analyse et de la géométrie. Notre plus éminent analyste, notre plus éminent géomètre, MM. Cauchy et Chasles, font constamment emploi des imaginaires et en déduisent les plus beaux théorèmes.

L'*Algèbre* de M. Bertrand, comme tout ce qui sort de cette plume, a un mérite tellement supérieur, qu'on ne saurait trop insister sur des défauts, inhérents à toute œuvre humaine.

Sous forme d'exercices, l'ouvrage contient les principaux résultats de transformation fonctionnelle déduits de la théorie des déterminants, mais qu'on a soin de ne pas désigner, cette théorie n'étant pas admise dans le Programme; de même pour d'autres théories. Les exemples empruntés à Gauss, Jacobi, Eisenstein, Cayley, Sylvester, sont d'un choix exquis; les solutions ne tarderont pas sans doute à paraître. Le célèbre auteur, fidèle à son système, ne cite personne; en ne citant personne, personne n'a à se plaindre.

ALVÉOLES DES ABEILLES,
EXERCICE DE CALCUL ET DE STÉRÉOTOMIE.

Admiranda tibi levium spectacula rerum
Et munire favos, et dædala fingere tecta.
(VIRG., *Georg.* lib. IV.)

1. Soit ABCDEF un hexagone régulier, tracé sur un plan que nous supposerons horizontal; aux trois sommets A, C, E de rang impair, élevons trois verticales Aa, Cc, Ee de longueurs quelconques, mais égales; aux trois sommets B, D, F, de rang pair, élevons aussi trois verticales Bb, Dd, Ff, égales entre elles, mais non aux trois premières verticales; qu'on fasse

$$Bb = Aa + \frac{AB}{2\sqrt{2}};$$

en menant les droites ab, bc, cd, de, ef, fa, on formera six trapèzes verticaux et égaux et un hexagone équilatéral $abcdef$. Chaque trapèze, tel que ABab, a deux angles droits en A et B, un angle obtus en a et un angle aigu en b; la tangente de l'angle obtus est égale à $-2\sqrt{2}$, la tangente de la moitié de cet angle est $\sqrt{2}$, et la tangente de l'angle aigu est $2\sqrt{2}$; de sorte que l'angle obtus est égal à $109° 28' 16''$ environ, et, par conséquent, l'angle aigu est égal à $70° 30' 44''$ environ. Au sommet a existe donc un angle solide trièdre, formé par les deux angles obtus des trapèzes et par un troisième angle fab aussi obtus et égal à l'angle obtus des trapèzes; propriété à démontrer. De même aux points c et e. Les droites fa, ab étant éga-

les, achevons le rhombe *fabi*; de sorte qu'on a en *a* un angle solide trièdre formé par deux trapèzes et un rhombe. Faisons la même construction en *c*; les deux rhombes *fabi*, *bcdi* ont le côté *bi* en commun, et en *b* il se forme un angle solide tétraèdre formé par deux trapèzes et deux rhombes présentant quatre angles plans, aigus et égaux. Les deux côtés *ia*, *ie* forment avec les côtés *af*, *ef* un troisième rhombe plan, égal aux précédents, ce qui est facile à prouver; de sorte qu'on aura en *i* un angle solide trièdre formé par trois rhombes et égal à chacun des angles solides en *a*, *c*, *e*; le point *i* est le *sommet* de l'alvéole. Le solide formé des six trapèzes et des trois rhombes représente les parois de l'alvéole en cire que construisent les abeilles. L'hexagone ABCDEF est l'entrée. Les trois rhombes sont la base de l'alvéole, le fond où est déposé le miel, nourriture du ver, première forme de l'insecte. Un système d'alvéoles compose un ensemble qu'on nomme *rayon*.

La liaison du système consiste dans la disposition suivante; les angles *dièdres* en *a* sont évidemment égaux chacun à 120 degrés.

Supposons qu'on remplisse un espace horizontal par des hexagones; qu'on construise sur chaque hexagone un alvéole. Les sommets seront dans un même plan horizontal, et trois faces rhomboïdales prises dans trois alvéoles contigus formeront une nouvelle base hexagonale, et le sommet de l'alvéole correspondant est au-dessous du plan des autres sommets, et achevant les alvéoles par ces nouvelles bases, les ouvertures hexagonales sont à l'opposé des ouvertures des premiers alvéoles. C'est ainsi que sont disposés les alvéoles dans chaque rayon, et par suite de cette construction toutes les faces rhomboïdales sont toutes dans trois plans, ce qui donne à tout l'édifice une extrême régularité. Les abeilles commencent par faire le rhombe et ensuite les faces trapèzes.

Il y a entre deux rayons consécutifs assez d'intervalle pour laisser passer deux mouches. L'ensemble de ces rayons forme la ruche.

2. Concevons les six sommets de l'ouverture hexagonale ainsi que le point *a*, et faisant mouvoir le point *b* le long de l'arête B*b*, construisons les rhombes comme précédemment. A chaque position du point *b* correspond un autre solide alvéolaire.

Il faut démontrer que ces solides sont équivalents et que l'aire varie. Cette aire est un minimum, lorsque les trois angles plans en *a* sont égaux, ce qui entraîne la relation que nous avons donnée ci-dessus (*voir* la solution de feu le capitaine Jacob, t. I[er], p. 160).

3. *Note historique*. Le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier sont les seuls polygones réguliers qui, pris isolément, puissent remplir un espace sans laisser de vide, et de ces trois polygones l'hexagone pour la même aire a le moindre contour. C'est le polygone que les abeilles ont choisi pour l'ouverture de leurs cellules. Pappus, géomètre du IV[e] siècle avant Jésus-Christ, en a déjà fait l'observation; mais les premières observations précises que nous ayons sur l'anatomie de l'insecte et la construction géométrique de l'alvéole sont dues à Maraldi (Jacques-Philippe), astronome de l'Observatoire royal, que son oncle, l'illustre Cassini, avait fait venir en 1687 de Perinaldo, près de Nice. Ces célèbres et curieuses observations ont été faites sur des ruches appartenant à Cassini placées dans le jardin attenant au bâtiment (*Mém. de l'Acad. des Sciences*, 1712, p. 297) (*). Ayant trouvé que les trois angles plans en *a* étaient égaux, il

---

(*) L'Observatoire était alors près de Paris, mais dehors. Un tel emplacement est aujourd'hui impérieusement exigé par les besoins de la science. Un édifice, modèle Pulkowa, serait un monument digne d'un règne dont les débuts sont si glorieux.

en conclut que cet angle devait être égal à 109° 28′; l'ayant mesuré, il trouva 110 degrés, différence qu'il attribue aux erreurs inévitables dans de telles opérations. Il compta soixante cellules environ dans chaque rayon; A*a* avait 5 lignes et AB 2 lignes de longueur. Le célèbre Réaumur poussa ces recherches plus loin dans son *Histoire des Insectes,* d'une lecture si attachante (t. V) (*). Il proposa au géomètre Kœnig (Samuel), correspondant de l'Académie des Sciences, connu par ses démêlés avec Maupertuis, de chercher le rhombe qui satisfasse au minimum d'aire. Appliquant la méthode du *calcul* infinitésimal, Kœnig trouve que l'angle obtus devait avoir 109° 26′. Réaumur manda ce résultat à Maclaurin. L'éminent géomètre résolut le problème par la méthode de sa *Géométrie infinitésimale*, et trouva pour l'angle du rhombe 109° 28′ 16″. Ce beau travail est inséré dans le tome XLII, année 1742, des *Transactions philosophiques*. Le Mémoire est intitulé : *Of the bases of the cells wherein the Bees deposite their honey* (Sur les bases des cellules où les abeilles déposent leur miel). Il fait partie d'une Lettre du 30 juin 1743, adressée à Martin Folkes, président de la Société royale. Ainsi les abeilles que Virgile a si admirablement chantées construisaient déjà de son temps, un problème dont la solution théorique était réservée au siècle des Newton et des Leibnitz. Donner un tel instinct à quelques molécules organisées! La toute-puissance divine se révèle dans l'infiniment grand, se révèle dans l'infiniment petit. *Mens agitat molem,* disait l'antiquité; mais le monde des infiniment petits en his-

(*) Pourquoi ne fait-on pas une nouvelle édition rectifiée et complétée de cette délicieuse production? J'en dis autant du *Spectacle de la nature*, de Pluche, que de Blainville aimait beaucoup. Ouvrages très-instructifs, d'une haute moralité et très-amusants : qualités dont la réunion est extrêmement rare.

toire naturelle et dans la science des nombres est une conquête des temps modernes. La théorie des quantités naissantes est similaire à celle de l'embryogénie .Les deux sciences doivent et devront leurs principaux progrès aux études infinitésimales. Leibnitz a mis entre les mains des géomètres un microscope qui nous découvre les propriétés d'une série indéfinie d'êtres numériques infiniment petits, se produisant les uns les autres suivant des lois de génération déterminées et certaines. Le microscope optique tend au même but pour les êtres organisés, ainsi que le polarimètre pour les corps inorganiques (*). Curieux de savoir si l'on rencontre dans la nature une forme analogue à celle que construisent les abeilles, je dois au savant professeur M. Cabart les renseignements suivants :

L'oxydule de cuivre cristallise sous forme de dodécaèdres rhomboïdaux, ayant huit angles trièdres, formés de trois dièdres de 120 degrés chacun. Les cristaux du grenat, de la pyrite de fer sont du même genre. L'eau glacée, d'après les observations de M. Clarke, physicien anglais, cristallisant dans le système rhomboédrique, présente deux trièdres formés de trois dièdres de 120 degrés chacun. Cette sorte de cristallisation est très-rare. Il est probable, d'après les calculs de M. Bravais sur les halos et les parhélies, que cette cristallisation existe dans les cristaux de neige. Les cristaux rhomboédriques de la chaux carbonatée ne présentent pas ces angles de 120 degrés.

(*) Leibnitz, dans une Lettre à Huyghens, dit : « J'aime mieux un Leuvenhoek qui me dit ce qu'il voit, qu'un Cartésien qui me dit ce qu'il pense. » Excellente leçon donnée aux métaphysiciens par un métaphysicien, mais géomètre.

SOLUTION DE LA QUESTION 311;

Par M. E. COMBESCURE.

Déterminer l'aire d'un hyperboloïde de révolution à une nappe limitée par deux parallèles, connaissant la distance de ces deux parallèles, leurs rayons et la portion de génératrice rectiligne qu'ils interceptent.

En désignant par r le rayon d'un parallèle quelconque placé à la distance z du cercle de gorge, l'équation de l'hyperboloïde de révolution est

$$r^2 = a^2 + m^2 z^2,$$

et l'élément de surface de l'hyperboloïde compris entre deux parallèles distants de dz a pour expression

$$d\lambda = 2\pi r d\sigma,$$

où $d\sigma$ représente l'élément de l'hyperbole génératrice, en sorte que

$$d\sigma = \sqrt{dr^2 + dz^2} = \frac{dz\sqrt{a^2 + n^2 z^2}}{r},$$

$$[n^2 = m^2(1 + m^2)].$$

On a donc

$$d\lambda = 2\pi\, dz \sqrt{a^2 + n^2 z^2},$$

et, par suite,

$$\lambda = \frac{\pi}{n}\left\{ \begin{array}{c} nz_2\sqrt{a^2 + n^2 z_2^2} - nz_1\sqrt{a^2 + n^2 z_1^2} \\ + a^2 \log \dfrac{nz_2 + \sqrt{a^2 + n^2 z_2^2}}{nz_1 + \sqrt{a^2 + n^2 z_1^2}} \end{array} \right\},$$

z_2, z_1 étant les z des parallèles qui limitent la portion de surface considérée.

Si r_2, r_1 désignent les rayons de ces mêmes parallèles, en sorte que

$$r_2^2 = a^2 + m^2 z_2^2,$$
$$r_1^2 = a^2 + m^2 z_1^2,$$

l'élimination de m^2 entre ces deux équations donne, en supposant z_2 et z_1 positifs,

$$(1) \qquad \frac{z_2}{z_1} = \sqrt{\frac{r_2^2 - a^2}{r_1^2 - a^2}}.$$

Soient g la portion de génératrice rectiligne interceptée; x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 les coordonnées de ses extrémités, de façon que

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = g^2;$$

d'où, en posant

$$g^2 - (h^2 + r_1^2 + r_2^2) = 2p, \quad (z_2 - z_1 = h),$$
$$(2) \qquad x_1 x_2 + y_1 y_2 = p.$$

Les extrémités de g se projetant sur une même tangente au cercle de gorge, on a

$$x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi = a,$$
$$x_2 \cos\varphi + y_2 \sin\varphi = a,$$

φ étant un angle arbitraire dont l'élimination donne

$$(3) \qquad x_1 y_2 - y_1 x_2 = \pm a \sqrt{g^2 - h^2}.$$

En ajoutant les équations (2) et (3) après les avoir élevées au carré, il vient

$$r_1^2 r_2^2 = a^2 (g^2 - h^2) + p^2;$$

d'où

$$a^2 = \frac{r_1^2 r_2^2 - p^2}{g^2 - h^2}.$$

Substituant dans l'équation (1) cette valeur de a^2 et faisant, pour abréger,

$$p + r_1^2 = p_1, \quad p + r_2^2 = p_2,$$

il vient

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{p_2}{p_1};$$

d'où et de

$$z_2 - z_1 = h$$

on déduit

$$z_2 = \frac{hp_2}{p_2 - p_1}, \quad z_1 = \frac{hp_1}{p_2 - p_1}.$$

On a ensuite

$$m^2 = \frac{r_1^2 - a^2}{z_1^2},$$

c'est-à-dire, à cause de $a^2 = \dfrac{p_1 p_2 - p(p_1 + p_2)}{p_1 + p_2}$,

$$m^2 = \frac{(p_2 - p_1)^2}{h^2(p_2 + p_1)}.$$

z_2, z_1, a^2 et m^2 étant connus en p, p_1, p_2, h, ou si l'on veut en r_1, r_2, g et h, on n'aura plus qu'à substituer leurs expressions précédentes dans celle de λ pour répondre complétement à la question. La substitution en elle-même ne présente aucune particularité digne d'être signalée.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. RUBBINI (DE NAPLES).

Presque en même temps je viens de recevoir le numéro d'août de vos *Annales* et celui du 2 juillet des *Comptes*

rendus de votre Académie des Sciences. Dans le premier je trouve à la page 305 la question :

« Construire la surface

$$(1) \qquad e^{r} = \frac{\cos x}{\cos y} \quad (e = \text{base népérienne}). \text{»}$$

(E. CATALAN.)

Dans le second, à la page 35, je trouve résolue la même question par l'auteur lui-même.

Or, Monsieur, tout en respectant le talent supérieur de votre savant, je ne puis m'abstenir de réclamer, en faveur de mon professeur M. Padula, une priorité qui lui est due au sujet de l'équation ci-dessus.

Ce savant napolitain s'était déjà occupé depuis 1852 (voir *Rendiconto della reale Accademia delle Scienze di Napoli*, n° 3, 1852) de la même question qui avait conduit M. Catalan à l'équation (1), à savoir de trouver sous forme finie les équations de deux surfaces dont les rayons de courbure sont égaux et opposés et qui jouissent en même temps de la propriété qu'une partie quelconque de la surface est un minimum entre toutes les surfaces qui ont même contour.

M. Padula commence sa *Note* par un renseignement des quatre surfaces jouissant des propriétés énoncées, et découvertes, la première par M. Catalan (l'hélicoïde gauche); la seconde (surface de rotation dont la méridienne est la chaînette homogène) par M. de Morgan, et les deux autres par M. Roberts (Michel). Ensuite il se propose la question : Chercher si parmi les surfaces dont la génératrice se meut parallèlement à elle-même, il s'en trouve quelqu'une dont les rayons de courbure soient égaux et opposés. Une autre question plus générale (celle sur les surfaces produites par le mouvement d'une courbe plane) avait conduit notre auteur à la question spéciale ci-dessus énoncée.

Or M. Padula trouve pour solution de son problème

$$(2) \qquad \frac{z}{m} = l \cos \frac{y\sqrt{1+a^2}}{m} - l \cos\left(\frac{x}{m} - \frac{ay}{m}\right),$$

a étant une constante arbitraire et m une autre constante qui satisfait à la condition

$$(3) \qquad -\frac{1+f'^2}{f''} = m,$$

[$y = 0$, $z = f(x)$ étant les équations de la génératrice supposée plane sans détruire la généralité de la question].

De cette dernière équation (3) il déduit la propriété que *la projection sur l'axe des* x *du rayon de courbure en un point quelconque de la génératrice est constante.*

L'équation (1) de M. Catalan se déduit de l'équation (2) de M. Padula, posant en celle-ci $a = 0$.

Ce dernier savant, en outre, trouve une autre surface qui dépend de transcendantes jusqu'à présent inconnues et dont l'équation est de la forme suivante :

$$z = f(x - \varphi) + \psi,$$

$$\varphi = \frac{\gamma + ay}{1+n^2} - \frac{m}{1+n^2}\, l \cos \frac{(y+\beta)\sqrt{1+a^2+n^2}}{m},$$

$$\psi = \frac{\gamma' - any}{1+n^2} - \frac{m}{1+n^2}\, l \cos \frac{(y+\beta)\sqrt{1+a^2+n^2}}{m}$$

(la fonction f étant déterminée par l'équation

$$mnl \frac{nf - 1}{\sqrt{1+f'^2}} - m \text{ arc tang } f' = (1+n^2)u + h,$$

et u représente la variable à laquelle se rapporte la fonction f).

Enfin l'analyse de M. Padula est tout à fait directe et sans tâtonnements.

SUR LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN BICARRÉS.

Waring a énoncé la conjecture que tout nombre est la somme de 19 bicarrés, en admettant le zéro comme bicarré. Jacobi a exprimé le désir de voir contrôler cette conjecture. M. C.-A. Bretschneider, professeur à Gotha, a entrepris ce contrôle pour les nombres de 1 à 4100. Ses Tables sont insérées dans le *Journal* de Crelle (t. XLVI, p. 1, 1853).

En résumé, il a trouvé que dans les nombres de 1 à 4100 il y en a :

28	décomposables en	2 bicarrés.
75	—	3
158	—	4
271	—	5
375	—	6
416	—	7
393	—	8
353	—	9
322	—	10
306	—	11
290	—	12
286	—	13
284	—	14
282	—	15
166	—	16
56	—	17
24	—	18
7	—	19

Les sept en 19 bicarrés sont 79, 159, 239, 319, 399, 479 (*), 559.

Ainsi

$$79 = 4.2^4 + 15.1^4,$$
$$159 = 4.2^4 + 1.3^4 + 14.1^4,$$
$$239 = 4.2^4 + 2.3^4 + 13.1^4,$$
$$319 = 15.1^4 + 3.2^4 + 1.3^4 = 4.2^4 + 3.3^4 + 12.1^4,$$
$$399 = 14.1^4 + 3.2^4 + 1.3^4 + 1.4^4 = 11.1^4 + 4.2^4 + 4.3^4,$$
$$479 = 13.1^4 + 3.2^4 + 2.3^4 + 1.4^4 = 10.1^4 + 4.2^4 + 5.3^4,$$
$$559 = 15.1^4 + 2.2^4 + 2.4^4 = 12.1^4 + 3.2^4 + 3.3^4 + 1.4^4$$
$$= 9.1^4 + 4.2^4 + 6.3^4.$$

Ces sept nombres ne peuvent se décomposer en moins de 19 bicarrés.

Cette identité

$$3^4 - 5.2^4 = 1$$

a facilité le calcul.

LETTRE SUR LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE.

« Mon cher monsieur Terquem,

» Lorsque je reçus, il y a une quinzaine de jours, la nouvelle livraison des *Nouvelles Annales,* je vous écrivis immédiatement pour protester au nom des géomètres contre les objections absolument dénuées de fondement que l'on élevait sur la théorie de la rotation donnée par M. Poinsot. N'ayant pas alors sous les yeux le Mémoire de l'illustre géomètre, je me bornais à deviner d'après mes souvenirs, par quel malentendu l'auteur de la Note avait pu se méprendre sur le sens des expressions em-

(*) Par erreur on a mis 379.

ployées et trouver une erreur où chacun n'avait aperçu jusqu'ici qu'un modèle de rigueur et d'élégance. Je viens de relire les premières pages de ce beau travail, et j'avoue qu'il me semble suffisant de conseiller à vos lecteurs d'en faire autant; c'est seulement pour ceux qui n'auraient pas le moyen de recourir au texte que je vous demande place pour quelques explications.

» J'ouvre le *Journal* de M. Liouville, t. XVI, p. 43, et je trouve un paragraphe intitulé : *Des forces centrifuges qui naissent de la rotation.* C'est celui-là qu'il faut lire pour apprécier la valeur des objections dont je parle.

On y trouvera d'abord la démonstration géométrique d'un théorème bien connu dont l'énoncé se lit page 44 (lignes 14 à 16) :

« La force centripète nécessaire pour qu'un point
» puisse tourner en cercle avec une vitesse u est expri-
» mée par le carré de cette vitesse divisé par le rayon du
» cercle. »

» M. Poinsot ajoute, il est vrai : « La même expres-
» sion convient à un mouvement curviligne quelcon-
» que... en prenant pour r le rayon du cercle osculateur à
» la courbe décrite au point que l'on considère. »

» Cette remarque, inutile pour ce qui va suivre, est placée là pour l'instruction du lecteur, mais vous connaissez l'adage : *Quod abundat, non vitiat.* Elle est donc parfaitement légitime, et cependant, s'il fallait absolument conjecturer, je me hasarderais à dire que c'est à cause d'elle que M. Poinsot, malgré toute sa clarté, n'a pas été compris par tout le monde.

» Je lis plus loin, page 45 :

« Dans la question qui nous occupe... il n'y a pas de
» force centripète qui intervienne pour faire tourner li-
» brement chaque molécule autour de l'axe (instantané)
» OZ, mais je considère que si cette force n'y est point,

» RIEN N'EMPÊCHE de la supposer, pourvu qu'on en sup-
» pose une égale et contraire. »

» Cette force centripète que rien n'empêche de supposer, est, on le voit, celle qui ferait décrire à la molécule *un cercle rigoureux.* Rien n'empêche évidemment de la supposer, pourvu qu'on introduise une force égale et contraire qui est la force centrifuge.

» Maintenant l'objection de M. S.-G. se réduit à ceci :

» Pourquoi introduisez-vous la force nécessaire pour faire tourner la molécule en rigueur autour de l'axe instantané? Je préférerais vous voir calculer la force centripète réelle, et, pour cela, déterminer le rayon de courbure de la trajectoire, très-différent de celui du cercle dont vous parlez.

» A ceci on peut répondre : M. Poinsot introduit cette force parce que c'est celle-là qui est commode pour son raisonnement tel qu'il veut le faire, et que rien n'empêche d'introduire dans un système deux forces égales et contraires quelles qu'elles soient. Ceci est si vrai, que l'on pourrait, si on le désirait, introduire la force que M. S.-G. nomme la véritable force centripète, pourvu que l'on adjoignît la véritable force centrifuge ; mais je n'aperçois pas à quoi cette introduction pourrait servir, et il semble que la chaîne des raisonnements, rompue alors dès le début, ne pourrait plus se renouer.

» J. BERTRAND. »

Note du Rédacteur. M. Poinsot, malgré toute sa clarté, n'a pas été compris de *tout le monde.* L'explication n'est donc pas superflue, vu que ce *tout le monde* comprend des esprits distingués. La force centripète que M. Poinsot évalue est une force *artificielle* pour ainsi dire, très-commode pour l'objet que l'illustre géomètre avait en vue, mais ce n'est pas la force centripète *réelle*

ou telle qu'elle existe réellement. M. Poinsot fait bien allusion à cette distinction. La discussion actuelle montre bien que cette allusion n'est pas suffisante. L'axe instantané de rotation instantanée ne serait-il pas plus convenablement désigné sous le nom de *droite de repos instantané?* car, à vrai dire, il n'y a pas de rotation. Chaque point tourne autour d'une droite élevée au centre de courbure perpendiculairement au plan osculateur relatif à la trajection décrite par ce point. L'ensemble de ces perpendiculaires est la surface gauche de rotation instantanée pour ce point. Chacun a la sienne. Dans un corps solide en mouvement, trois de ces surfaces déterminent toutes les autres.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DES THÉORÈMES DE M. STEINER
Énoncés sous les nos 5, 6 et 7

(voir t. XIV, p. 141 et 142);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

1. Pour démontrer ces théorèmes, il faut commencer par rappeler quelques propositions préliminaires qui sont une conséquence très-simple de la théorie des *polaires* et du principe de *correspondance anharmonique* récemment exposé par M. Chasles dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences.

2. Soient données sur un plan deux coniques Σ, Σ' et une droite arbitraire L. p et p' étant les pôles de cette droite dans les deux coniques, la droite pp', qui les joint, est unique et déterminée. J'appellerai cette droite la *réciproque* de L.

Par un point quelconque O de L, soient menées des droites OL', OL'', etc.; leurs pôles respectifs q, q', r, r', etc., seront distribués sur les deux polaires du point O.

et ils se *correspondront anharmoniquement;* donc (*Géométrie supérieure*, n° 555), les droites pp', qq', rr', etc., enveloppent une conique Ω *relative* au point O.

A un second point quelconque O′ correspondra pareillement une seconde conique Ω' *relative* à ce point.

3. Donc la droite OO′ a pour *réciproque* une des quatre tangentes communes aux deux coniques Ω, Ω', et cette tangente est déterminée, ainsi que cela résulte d'ailleurs de la première construction des droites réciproques (n° 2), parce que les trois autres tangentes communes E, F, G, dont une au moins est toujours réelle, sont des droites fixes et indépendantes de la position variable de la droite OO′. C'est ce que je vais faire voir dans le paragraphe suivant.

4. En effet, soit E l'une de ces trois tangentes. Si on la regarde comme enveloppant la conique Ω, il résulte du numéro 2 qu'elle joint les deux pôles $o\,\omega$ d'une certaine droite OM, laquelle passe par le point O dont Ω est la conique relative, ces pôles étant pris par rapport aux deux coniques fixes Σ, Σ'. Donc, réciproquement, les pôles e, e' de E se trouvent sur cette droite OM.

Par une raison semblable, si l'on regarde E comme enveloppant la conique Ω', ses pôles e, e' doivent se trouver sur une autre droite OM′, distincte de la droite OM, et passant par le point O′ dont Ω' est la conique *relative*.

Cette double condition exige évidemment que les points e, e' coïncident en un seul et même point.

5. Il résulte de là que chacune des trois tangentes E, F, G a même pôle dans les deux coniques proposées Σ, Σ'. Or, on sait que dans le plan de deux coniques données, il n'existe que trois droites fixes qui jouissent de cette propriété remarquable (*voir* la *Géométrie supérieure* et le *Traité des propriétés projectives*). On sait en outre que

ce pôle commun est précisément le point d'intersection des deux autres droites; que ce point est, en même temps, le point de concours de deux cordes communes conjuguées ou *axes de symptose* des deux coniques; que chacune de ces droites contient deux *centres d'homologie* conjugués, centres que l'on obtient aisément en cherchant les deux points (réels ou imaginaires) qui divisent harmoniquement à la fois les deux segments interceptés par les deux coniques sur celle des trois droites que l'on considère (*Géométrie supérieure*, n° 210). Etc.

6. D'après ce qui précède, les coniques *relatives* à tous les points du plan touchent trois droites fixes de ce plan; ce sont précisément les trois droites remarquables E, F, G dont je viens de parler.

Réciproquement, toute conique tangente à ces trois droites est relative à un point du plan. Car deux autres tangentes quelconques de cette conique ont pour *réciproques* deux droites dont le point de rencontre aura pour conique relative une conique tangente à ces deux droites (n° 2) et aux trois tangentes fixes E, F, G et qui se confondra, par conséquent, avec la conique en question.

7. Actuellement, prenons pour conique le segment rectiligne terminé *em* qui joint un point quelconque *m* de E au point de concours *e* des deux droites F, G, segment qu'on peut regarder comme représentant une ellipse infiniment aplatie à laquelle les trois droites E, F, G sont évidemment tangentes (*). Cette conique particulière sera, comme dans le cas général (n° 6), *relative* à un point m', et je vais prouver que ce point m' est situé sur E comme le point *m* lui-même.

En effet, pour que les droites pp', qq', rr', etc. (n° 2),

(*) Voir, à ce sujet, le *nota* qui termine cet article, n° 8.

qui enveloppent et qui déterminent, dans ce cas, la conique relative em, passent toutes par le point m, extrémité du segment terminé em, il faut (comme on sait, et comme je le rappelle expressément dans le *nota* ci-après) que les droites fixes pqr, $p'q'r'$, polaires du point m', sur lesquelles sont marquées les divisions homographiques p, q, r, etc., p', q', r', etc., passent par le point p, et, de plus, il faut que ce point soit un point homologue de deux divisions. Donc, en premier lieu, il existe une droite m'I passant par le point m', telle, que ses deux pôles, par rapport aux coniques données Σ, Σ', coïncident en un seul et même point au point e. Or j'ai fait voir (n° 5) que la droite E est la seule droite du plan des deux coniques qui jouisse de cette propriété. Donc m'I n'est autre chose que E, ce qui démontre que le point m' est sur E comme le point m lui-même.

Il est d'ailleurs évident que les points m et m' se correspondent anharmoniquement, et, de plus, qu'ils sont en involution. Car le point m, considéré comme appartenant à l'une ou à l'autre des deux divisions, a toujours pour correspondant le même point m'. Les points doubles de l'involution jouissent de la propriété que les deux pôles relatifs à chacune des droites qui passent par l'un d'eux se trouvent sur une droite qui passe aussi par ce point. Donc (*Geométrie supérieure* et *Traité des propriétés projectives*) ces points doubles sont les centres d'homologie des deux coniques, etc.

8. Je vais maintenant donner, dans le *nota* suivant, les détails auxquels j'ai fait allusion plus haut (n° 7) et qui auraient retardé la marche des raisonnements.

Nota. On sait que quand deux faisceaux homographiques ont leurs sommets en deux points distincts, leurs rayons homologues se coupent généralement sur une conique. Dans le cas particulier où deux de ces rayons coïn-

cident en direction avec la droite qui joint les deux sommets des faisceaux, le point de concours des rayons homologues décrit une droite indéfinie. Mais il est sous-entendu que la droite de jonction des deux sommets fait aussi partie de la conique qui est décrite dans ce cas particulier; chacun de ses points peut effectivement être regardé comme le point d'intersection des deux rayons homologues qui se confondent avec elle. Et il faut bien qu'il en soit ainsi; car la première droite *indéfinie* ne saurait représenter à elle seule une section conique. Et cette conique se réduit, dans ce cas, au système des deux droites dont je viens de parler, système qu'on peut regarder comme une hyperbole infiniment dilatée et réduite à ses asymptotes.

Pareillement, les droites qui joignent les points homologues de deux divisions homographiques tracées sur deux droites distinctes, enveloppent généralement une section conique. Si le point de concours de ces deux droites fixes est un point de coïncidence de deux points homologues, la droite mobile passe par un point fixe ou enveloppe ce point. Mais ce point ne représente pas plus à lui seul la conique du cas général, pas plus, dis-je, qu'une conique n'était représentée par une seule droite dans la première partie du *nota*. En effet, une droite quelconque, menée par le point de concours des deux droites fixes, peut être regardée comme joignant les deux points homologues qui coïncident en ce point, et par conséquent comme une tangente à la conique enveloppe. Donc cette conique est représentée dans ce cas particulier par le segment terminé à ce point de concours et au second point fixe par lequel passent toutes les autres droites mobiles; et on peut la regarder comme une ellipse infiniment aplatie et réduite à son grand axe.

9. Ceci posé, la démonstration des théorèmes de

M. Steiner se fait sans difficulté, comme on va le voir.

10. Théorème V. *Quatre coniques étant inscrites dans un triangle, ces coniques prises deux à deux ont encore en commun, outre les côtés du triangle, une quatrième tangente* T; *il y a six de ces tangentes* T *et elles coupent chaque côté du triangle en six points en involution.*

On pourra toujours décrire, ou simplement supposer, sur le plan de la figure, un système de deux coniques Σ, Σ' dont les trois còtés du triangle soient précisément les trois droites remarquables E, F, G dont je viens de parler; ceci est évident. Soient C, C′, C″, C‴ les quatre coniques données, et c, c', c'', c''' leurs points *réciproques* par rapport aux deux courbes Σ, Σ'. Ces points forment un quadrilatère dont les quatre côtés et les deux diagonales sont les six droites *réciproques* des six tangentes menées aux quatre coniques. Soient a, a', b, b', c, c' les points où ces six tangentes rencontrent l'un E des côtés du triangle, et α, α', β, β', γ, γ' les six points d'intersection de E avec les côtés et les diagonales du quadrilatère. Ceux-ci sont en involution (*Géom. sup.* n° 339); donc les six autres a, a', etc., qui leur correspondent anharmoniquement, sont eux-mêmes en involution.

C. Q. F. D.

Cette démonstration indique en même temps de quelle manière on doit conjuguer les six points dans l'involution. Par exemple, si a répond à la tangente commune aux deux coniques C, C′, a' répondra à la tangente commune aux deux autres c'', c'''.

11. Théorème. *Si quatre coniques ont en commun un foyer et une tangente* A, *elles ont encore en commun prises deux à deux six tangentes* T *telles, qu'elles coupent la tangente* A *en six points en involution.*

Ce théorème est un simple corollaire du précédent. Car

(*Géom., sup.* n° 736, ou *Traité des propriétés projectives*) des coniques qui ont un foyer commun sont dans le même cas que des coniques qui ont deux tangentes communes.

12. Théorème VII. *Si quatre paraboles ont le même foyer, prises deux à deux, elles ont une tangente commune* T; *si par un point* p *on abaisse des perpendiculaires sur ces six tangentes, on a un faisceau en involution.*

Les paraboles ont une tangente commune à l'infini, et le foyer commun tient lieu de deux autres tangentes communes (imaginaires). Donc, en vertu du théorème V, les six points où les six tangentes rencontrent la droite à l'infini sont en involution. Les six perpendiculaires issues du point *p* faisant avec ces six tangentes des angles égaux, rencontrent la droite à l'infini en six points homographiques aux six premiers (*Géom sup.*, n° 652), et qui, par suite, seront comme eux en involution. Donc il en est de même des six perpendiculaires.

C. Q. F. D.

Je ferai remarquer, en terminant, que toutes les propositions qui font l'objet de cette Note ont leurs corrélatives qu'on démontrerait directement par des raisonnements analogues. Ces nouvelles propositions qui sont intéressantes, fournissent une interprétation et une démonstration géométriques très-simples des divers théorèmes déduits de l'analyse par M. Magnus, de Berlin, dans le tome VIII du *Journal* de Crelle, p. 51. Je me propose de revenir ailleurs sur ce sujet.

NOTE SUR LES OMBRES A LUMIÈRE PARALLÈLE
ou projections obliques des polyèdres, sur leurs projections orthogonales et sur les changements de plans de projections et rotations comme méthodes d'enseignement;

Par A. CHEVILLARD,
Professeur de Mathématiques et de Géométrie descriptive.

1. Depuis plusieurs années, on s'attache, dans les classes de mathématiques, à proposer des problèmes réellement utiles, applications des théories enseignées. Cet excellent usage n'est guère suivi pour la géométrie descriptive que dans les écoles professionnelles. C'est d'autant plus regrettable pour les élèves des Lycées, qu'ils ont des ressources qui manquent aux dessinateurs et aux mécaniciens. On peut s'en prendre avant tout à la plupart des Éléments de géométrie descriptive qui ne présentent pas de méthodes suffisamment pratiques. Ainsi le plan y est toujours indiqué par ses deux traces, quand la construction le donne ordinairement par trois points et sans traces possibles. Les solutions des problèmes sur le cylindre, le cône, y exigent les traces de ces surfaces, tandis que dans la pratique, ces surfaces étant le plus souvent de révolution, la connaissance de leurs traces pour les tangences, intersections, etc., devient tout à fait inutile. C'est en suivant depuis longtemps un système entièrement différent que j'ai reconnu, par l'expérience des résultats acquis, combien les idées de M. Olivier sont propres à vulgariser et à faire avancer la géométrie descriptive. On me permettra de revenir tout à l'heure sur

ce sujet qui semble acquérir une nouvelle opportunité.

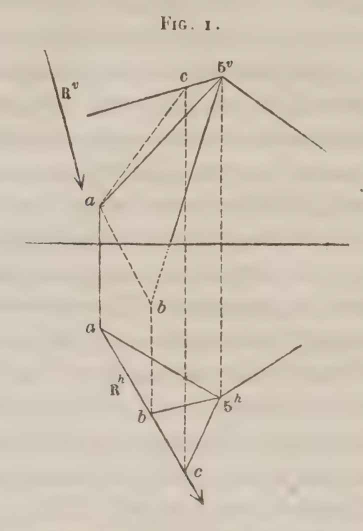
2. Le problème des ombres à lumière parallèle pour les polyèdres pouvant s'aborder dès l'ouverture d'un cours de géométrie descriptive, il sera intéressant pour les commençants d'en faire des applications à l'architecture. Étant donnés par les deux projections orthogonales les sommets 1, 2, 3, 4, 5, etc., d'un polyèdre *convexe* P et le rayon lumineux R, il s'agit d'en dessiner les faces obscures, éclairées et les ombres portées sur les plans de projection. On déterminera d'abord la brisée polygonale B par laquelle le prisme parallèle à R et circonscrit à P touche ce polyèdre, brisée qui est en même temps le contour apparent de P vu dans le sens de R, et aussi ligne séparative des ombres et de la lumière sur ce corps. Pour cela, on projettera parallèlement à R tous les sommets de P, soit sur les deux plans de projection, soit sur l'un d'eux, en ne conservant que la première trace que fournit le rayon lumineux. Cela dépendra de l'effet qu'on voudra rendre. Le polygone *convexe* $2^h\,3^h\,5^h\,6^h$, etc., par exemple, dont les côtés sont projections obliques d'arêtes de P et qui renferme certaines traces 1^h, 4^h, etc., donne immédiatement la *séparative* 2356, etc., dont deux côtés présenteront peut-être un coude sur les deux plans de projection, et l'on pourra déjà ombrer toute la partie plane comprise dans l'intérieur de $2^h\,3^h\,5^h \ldots\, 7^v\,8^v$, ombre portée et projection oblique de P. Reste à indiquer en projections les ombres propres, c'est-à-dire les faces obscures. Or la connaissance d'une face obscure F suffira pour trouver toutes les autres, car si F n'a aucune arête de la séparative, toutes les faces adjacentes à F par quelque arête seront obscures, et si F tient à la séparative par quelque arête, la face F′ qui tient à F par cette arête est éclairée, de sorte qu'on pourra, de proche en proche, re-

connaître toute la partie éclairée de P; et il sera bien d'indiquer dans l'ombre portée en plein ou par une couleur désignée toutes les arêtes des faces éclairées pour y présenter l'aspect de P vu en projection oblique parallèle à R.

3. Cherchons donc une seule face obscure ou éclairée. Il est rare qu'à vue d'œil on n'en aperçoive pas une, attendu que deux faces successives ont la même manière d'être par rapport à R toutes les fois que leur arête commune n'est pas sur la séparative. D'ailleurs, si une face est horizontale, elle est éclairée ou obscure selon qu'elle est la plus haute ou la plus basse de P, la lumière venant de haut en bas. Si une face est verticale, la projection R^h seule indique si R la rencontre. Remarque analogue sur l'emploi de R^v. Une observation très-commode est que parmi les projections obliques d'arêtes comprises dans l'intérieur de $2^h\,3^h\,5^h\ldots$, on en trouve aisément deux qui se croisent en h, par exemple, mais jamais plus pour h, P étant convexe; menant par h un rayon en sens contraire de R, ou seulement une seule projection R^h, ce qui n'exige que la pose de l'équerre, sans rien tracer, on verra que R rencontre deux arêtes de P, ni plus, ni moins, dont la première sera entièrement obscure, c'est-à-dire séparera deux faces obscures. Enfin, si l'on ne trouvait pas un point h de cette espèce (cas très-rare), menez près d'un sommet 5 de la séparative et la rencontrant un plan vertical R^h; il coupera l'angle solide 5 selon un petit polygone très-facile à obtenir en projection verticale. Tout côté de cette projection qui n'est pas rencontré par la direction R^v indique une face obscure. Ainsi soit le sommet séparatif 5 (*fig.* 1), l'arête séparative $5a$; le plan R^h coupe les arêtes $5a$, $5b$, $5c$ aux points a, b, c, ce qui donne les droites ac et ab comprises dans les faces $5ac$ et $5ab$ adjacentes à la séparative. Comme R^v ne rencontre pas ab, la face $5ab$ est obscure, $5ac$ est éclairée. Ainsi, en résumé, pas ou très-

peu de constructions à faire pour déterminer les faces obscures de P.

Fig. 1.



4. Les faces obscures, c'est-à-dire invisibles dans la direction R, sont déjà indiquées dans l'ombre portée par leurs arêtes ponctuées ou d'une couleur peu tranchée; mais sur les projections il faut teinter ces faces obscures lorsqu'elles y sont visibles. Les faces visibles en projection horizontale étant les faces éclairées par une lumière verticale, on les reconnaît tout de suite par la méthode précédente (n° 3), puisque la projection P^h donne la séparative pour la lumière verticale et que le plan R^h devient ici un plan vertical de direction quelconque. D'ailleurs le croisement de deux projections horizontales d'arêtes résout tout de suite la question. Même observation pour les faces visibles en projection verticale. Ainsi l'on se procure aisément trois aspects du solide éclairés par la même direction de lumière.

5. Quand le polyèdre n'est pas convexe, qu'il présente

des angles solides ou des dièdres rentrants, comme dans un escalier droit, la séparative pourra être projetée obliquement en partie sur le plan horizontal, en partie sur des faces de ces dièdres, et, par suite, être discontinue dans l'espace, parce que R raserait à la fois deux arêtes appartenant à deux faces d'un dièdre ou même à deux dièdres séparés, et viendrait ensuite rencontrer le sol. Certaines arêtes peuvent alors être obscures dans une partie, éclairées dans l'autre. En étudiant séparément les portions convexes du polyèdre, on aura lieu d'appliquer les principes précédents. On peut proposer, dans ce genre, des sujets intéressants; mais je doute qu'un professeur qui ne fait jamais de croquis, voie tout de suite les fautes des dessins présentés, indique une direction meilleure du rayon lumineux, etc (*).

6. Enfin, on peut avoir des groupes de polyèdres qui se pénètrent ou non. Il faudra déterminer leurs intersections (*Géométrie descriptive* de M. Amiot), déterminer la séparative pour chacun d'eux. Les ombres pourront se porter les unes sur les autres *sans croître d'intensité*, de façon que les ombres des corps les plus près du plan horizontal par rapport à R sont plus noires et traversent en restant sensibles les ombres des corps moins rapprochés. Il me paraît difficile d'indiquer des moyens généraux ayant assez de précision pour s'appliquer tout de suite à tous les cas. On remarquera principalement qu'aussitôt qu'une séparative d'un corps porte ombre sur une face éclairée d'un autre corps, cette ombre reste dans cette face éclairée ou continue jusqu'à la rencontre d'une séparative de ce deuxième corps; en ce point le rayon lumineux rasant deux séparatives, il en résulte l'intersection de deux om-

---

(*) Dans le dessin des machines, les ombres *portées* embrouillent souvent plus qu'elles n'éclaircissent. Elles ne sont utiles que pour accuser la forme des surfaces courbes. Tm.

bres portées sur un troisième corps ou sur le plan horizontal, etc.

7. Je terminerai en faisant observer que les projets d'architecture et les dessins topographiques sont éclairés par de la lumière dite à 45 degrés, locution mal comprise de beaucoup de praticiens. Les projections du rayon sont, en effet, inclinées à 45 degrés sur la ligne de terre, mais le rayon lumineux fait avec chaque plan de projection l'angle que fait la diagonale d'un cube avec la diagonale d'une de ses faces qui part du même sommet, angle très-facile à calculer.

8. Le problème des ombres d'un polyèdre pourrait se résoudre par deux changements de plans de projection qui rendraient R perpendiculaire au dernier. Ce moyen sera en général trop compliqué. On en accuserait à tort la transformation des projections. Cette méthode devra toujours être préférée *chaque fois qu'en particularisant les données par rapport aux deux plans de projection, sans rien changer à leur position relative dans l'espace, on trouvera une solution immédiate du problème,* ce qui n'est pas le cas actuel. Faute de bien entendre cette condition, la méthode des changements de plans d'Olivier, si simplement exposée dans l'ouvrage de M. Amiot, soulève encore maintenant de nombreuses critiques. Je vais prouver qu'elles sont toutes tirées de l'ignorance du sujet.

9. L'opposition aux transformations de projections et rotations se résume dans les quatre motifs suivants :

1°. *Ces méthodes sont inutiles, puisqu'on faisait de la Géométrie descriptive avant M. Olivier.*

C'est exactement comme si ayant su autrefois, je suppose, discuter analytiquement les propriétés géométriques des courbes, sans le problème de la transformation des coordonnées, on renonçait à refaire aujourd'hui cette

discussion par le secours de ce problème. Mais ici il y a plus encore. Si l'on voulait se donner la peine d'examiner avant de critiquer, on verrait que les anciennes explications données pour calculer par les projections la distance de deux points, les angles des droites, des plans, etc., deviennent inutiles par l'emploi des changements de plans et rotations, lequel fait d'abord retrouver les constructions usitées et disparaître en même temps tous ces cas particuliers dont plusieurs livres élémentaires sont remplis, parce que ces explications soi-disant générales y devenaient réellement insuffisantes. Dans notre système d'enseignement, le procédé d'exécution étant aussi uniforme que général, il suffit d'énoncer quelques-uns de ces cas pour que les élèves les résolvent immédiatement et de la manière la plus simple.

2°. *Les épures faites par ces méthodes sont compliquées et confuses. On voit un changement de plan, on se perd dans plusieurs.*

Il faut faire attention que la pratique des changements de plans et rotations doit être raisonnée avant toute application, que ses qualités principales sont, au contraire, de permettre de rejeter loin du résultat à obtenir les constructions auxiliaires pour donner à ce résultat toute l'expression désirable, qu'on n'emploie pas indifféremment un changement ou une rotation, qu'il y a des règles très-simples pour rendre visuelles toutes les constructions qui en résultent, qu'il n'y a aucune nécessité de voir l'ensemble des opérations fournies par trois changements (cas très-rare), qu'on n'a jamais besoin de regarder que la dernière ligne de terre, et qu'enfin une règle très-facile évite même la vision dans l'espace en la ramenant par cette vision même à la lecture sur le papier (t. XIII, p. 91).

3°. *Cette règle n'est qu'un mécanisme, et il faut rejeter toutes ces méthodes réduisant l'esprit au rôle de ma-*

chine, parce que, dit-on, leur application n'exige aucun raisonnement.

On oublie précisément de prouver que ces méthodes sont dans ce cas. Est-ce que toutes les règles d'arithmétique, les évaluations géométriques, les formules d'algèbre, des calculs différentiel et intégral, etc., ne sont pas des mécanismes ingénieux dont l'effet est démontré à priori satisfaire au but proposé? Mais d'abord si l'on interdit les changements de plans et les rotations en principe, il n'en faut pas faire d'applications sous un autre nom là où il est impossible de les éviter (surfaces de révolution, construction de pièces d'assemblage, etc.); mais si l'on ne croit en critiquer que l'abus, il est vraiment singulier qu'il existe des méthodes pour résoudre uniformément, de la façon la plus simple, la plus rapide et la plus expressive, tous les problèmes fondamentaux de la géométrie descriptive et que ces méthodes soient des mécanismes sans valeur et sans raison d'être.

4°. Enfin, d'autres personnes objectent que *ces méthodes sont trop analytiques, qu'elles s'éloignent de la géométrie pure, que trouver la position la plus convenable des données par rapport aux plans de projection est une question difficile, etc.*

Le procédé géométrique indépendant de tout moyen d'exécution une fois reconnu par la géométrie élémentaire ou supérieure de l'espace, selon la question, le moyen graphique s'ensuivra en conséquence. Je ne pense pas qu'il faille de grands efforts d'intelligence pour remarquer qu'une droite finie est projetée en vraie grandeur sur un plan auquel elle serait parallèle, qu'un angle dièdre est obtenu en vraie grandeur sur un plan perpendiculaire à son arête, etc., tous résultats qui doivent être prévus, au contraire, par la géométrie pure. Que si la rotation qui doit produire ces positions introduit quelque

confusion dans les données, il faut préférer un changement de plan; qu'on trouve bien les distances de divers points à un plan par un seul changement de plan, mais qu'une rotation ne conviendrait que dans le cas d'un seul point par lequel on fait passer l'axe, etc. Du reste, ces méthodes ont un caractère mathématique si prononcé, qu'elles suppléent parfaitement, comme je l'ai vérifié bien souvent, des études incomplètes sur divers points de la géométrie pure, en les rendant pour ainsi dire évidents sans démonstration. Aussi sont-elles enseignées de préférence à toutes autres dans les écoles professionnelles de Châlons, d'Angers, de Lyon et pour l'école des Beaux-Arts de Paris. S'agit-il, par exemple, de chercher l'intersection d'une droite et d'un cône de révolution donné de sommet, d'angle et d'axe? Il faudra, dans le système d'enseignement généralement suivi, faire passer un plan par la droite et le sommet du cône, chercher l'intersection de ce plan avec une trace du cône, laquelle est une courbe du deuxième degré, pour en conclure ensuite la génératrice qui coupera la droite au point cherché. Si l'on ne veut pas construire la courbe par points, il faudra déterminer un foyer et un ou deux sommets; trouver avec ces seules données la rencontre de la courbe et d'une trace du plan, ce qui, pour le dire en passant, n'est plus de la géométrie élémentaire selon les Programmes.

Du reste, on ne s'inquiète pas si la trace du plan est hors du cadre et la courbe aussi; si, quand elles y sont, le point auxiliaire est lui-même dans le cadre, parce qu'en définitive ces circonstances étant les plus fréquentes, il faudrait en conclure que la méthode est en général impraticable. Ce que je dis de ce problème, il faut le répéter, sans exception, de tous les problèmes relatifs au cône, au cylindre et aux surfaces de révolution et de tous les problèmes dépendant de la recherche d'un point auxiliaire.

De bonne foi, peut-on comparer cette méthode avec celle qui consiste à projeter la droite et le cône sur un plan parallèle à l'axe du cône pour obtenir tout de suite le point cherché à l'aide d'une section circulaire? c'est-à-dire en résumé à faire deux changements de plans successifs dont le dernier rende le cône vertical. Ces procédés, si bien appliqués par les praticiens qui ont peu de connaissances scientifiques, sont donc ceux qui conviennent aussi le mieux à de plus instruits, et si l'objection 4° était fondée, cela reviendrait à n'admettre aucun discernement ni appréciation mathématique chez ceux qui doivent le plus en avoir.

Note du Rédacteur. Quand faut-il changer de plans de projections, faire des rabattements, des rotations? Réponse : quand vous le jugerez commode. Quand cela est-il commode? Il n'y a pas de réponse à faire à telle question. Toutes les épures de charpente ne roulant que sur des polyèdres, on y fait continuellement des changements de plans de projections (*), et de tout temps on a fait des épures de charpente. Où est donc la nouveauté de ce système de changements dont on fait tant de bruit? La clarté et la simplicité d'une épure dépendent du discernement de l'opérateur, et il n'y a pas de règle pour donner ce discernement. Au propre comme au figuré, il faut éviter, autant que possible, les changements de plan, user de ce moyen avec économie, et ne s'en servir, style de prospectus, que lorsque le besoin s'en fait sentir.

(*) *Exemple :* L'épure des pannes et tasseaux de l'empanon déversé et délardé

SUR LES FRACTIONS CONTINUES ALGÉBRIQUES;

D'APRÈS GAUSS.

Met. nova. integr. Comm. Gotting. vol. II, 1814-15, pages 62.

1. Soit proposée la fraction continue

$$\varphi = \cfrac{v}{w + \cfrac{v'}{w' + \cfrac{v''}{w'' + \cfrac{v'''}{w''' + \ldots}}}}$$

Formons ces deux séries V, V', V'', V''', etc., W, W', W'', W'''; d'après ces relations

$$\begin{array}{ll} V = 0, & W = 1, \\ V' = v, & W' = wW, \\ V'' = w'V' + v'V, & W'' = w'W' + v'W, \\ V''' = w''V'' + v''V', & W''' = w''W'' + v''W', \\ V^{\text{IV}} = w'''V''' + v'''V'', & W^{\text{IV}} = w'''W''' + v'''W'', \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

on aura

$$\frac{V}{W} = 0,$$

$$\frac{V'}{W'} = \frac{v}{w},$$

$$\frac{V''}{W''} = \cfrac{v}{w + \cfrac{v'}{w'}},$$

$$\frac{V'''}{W'''} = \cfrac{v}{w + \cfrac{v'}{w' + \cfrac{v''}{w''}}},$$

et ainsi de suite.

On en déduit

$$\begin{aligned} VW' - V'W &= -v, \\ V'W'' - V''W' &= +vv', \\ V''W''' - V'''W'' &= -vv'v'', \\ V'''W^{IV} - V^{IV}W''' &= +vv'v''w''', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ainsi dans la série

$$\frac{v}{WW'} - \frac{vv'}{W'W''} + \frac{vv'v''}{W''W'''} - \frac{vv'v''v'''}{W'''W^{IV}} + \ldots,$$

Le premier terme est $\frac{V'}{W'}$;

La somme des deux premiers termes égale $\frac{V''}{W''}$;

La somme des trois premiers termes égale $\frac{V'''}{W'''}$;

La somme des quatre premiers termes égale $\frac{V^{IV}}{W^{IV}}$;

Et ainsi de suite.

Cette série, soit qu'elle se termine ou qu'elle se prolonge à l'infini, exprime la valeur de φ et aussi la différence de φ et des fractions approchées

$$\frac{V'}{W'}, \quad \frac{V''}{W''}, \quad \frac{V'''}{W'''}, \ldots.$$

Il est facile de voir qu'on a aussi les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi W'' - V'' &= w'(\varphi W' - V') + v'(\varphi W - V), \\ \varphi W''' - V''' &= w''(\varphi W'' - V'') + v''(\varphi W' - V'), \\ \varphi W^{IV} - V^{IV} &= w'''(\varphi W''' - V''') + v'''(\varphi W'' - V''), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Application.

Soit

$$\varphi = \frac{1}{2}\log\frac{1+u^{-1}}{1-u^{-1}} = u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \frac{1}{7}u^{-7} + \ldots$$

Réduite en fraction continue, on a

$$\varphi = \cfrac{1}{u - \cfrac{\frac{1}{3}}{u - \cfrac{\frac{2.2}{3.5}}{u - \cfrac{\frac{3.3}{5.7}}{u - \cfrac{\frac{4.4}{7.9}}{u - \ldots}}}}}$$

ainsi

$$v = 1, \quad v' = \frac{1}{3}, \quad v'' = -\frac{4}{15}, \quad v''' = \frac{9}{35}, \quad v^{\text{IV}} = -\frac{16}{63}, \ldots,$$

$$w = w' = w'' = w''' = w^{\text{IV}} = \ldots = u;$$

$$V = 0,$$

$$V' = 1,$$

$$V'' = u,$$

$$V''' = u^2 - \frac{4}{15},$$

$$V^{\text{IV}} = u^3 - \frac{11}{21}u,$$

$$V^{\text{VI}} = u^4 - \frac{7}{9}u^2 + \frac{64}{945},$$

$$V^{\text{V}} = u^5 - \frac{34}{33}u^3 + \frac{1}{5}u,$$

$$V^{\text{VII}} = u^6 - \frac{50}{39}u^4 + \frac{283}{715}u^2 - \frac{256}{15015},$$

. . . .

$$W = 1,$$
$$W' = u,$$
$$W'' = u^2 - \frac{1}{3},$$
$$W''' = u^3 - \frac{3}{5}u,$$
$$W^{\text{IV}} = u^4 - \frac{6}{7}u^2 + \frac{3}{35},$$
$$W^{\text{V}} = u^5 - \frac{10}{9}u^3 + \frac{5}{21}u,$$
$$W^{\text{VI}} = u^6 - \frac{15}{11}u^4 + \frac{5}{11}u^2 - \frac{5}{231},$$
$$W^{\text{VII}} = u^7 - \frac{21}{13}u^5 + \frac{105}{143}u^3 - \frac{35}{429}u,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il est facile de voir que les V et les W sont tous des fonctions entières de u; que $V^{(m)}$ est de degré $m-1$, et que les puissances $m-2$, $m-4$, $m-6$ manquent; que $W^{(m)}$ est de degré m, et les puissances $m-1$, $m-3$, $m-5$, etc., manquent; et l'on a

$$\varphi = \frac{1}{WW'} + \frac{1}{3\,W'W''} + \frac{2.2}{3.3.5\,W''W'''} + \frac{2.2.3.3}{3.3.5.5.7\,W'''W^{\text{IV}}} + \frac{2.2.3.3.4.4}{3.3.5.5.7.7.9\,W^{\text{IV}}W^{\text{V}}} + \ldots,$$

et aussi généralement

$$\varphi - \frac{V^{(m)}}{W^{(m)}} = \frac{2.2.3.3\ldots m.m}{3.3.5.5\ldots(2m-1)(2m+1)\,W^{(m)}W^{(m+1)}} + \frac{2.2.3.3\ldots(m+1)(m+1)}{3.3.5.5\ldots(2m+1)(2m+3)\,W^{(m+1)}W^{(m+2)}} + \text{etc.}$$

Si l'on développe $\dfrac{V^{(m)}}{W^{(m)}}$ en une série descendante, son

premier terme sera

$$\frac{2.2.3.3\ldots m.m.u^{-(2m+1)}}{3.3.5.5\ldots(2m-1)(2m+1)};$$

car le premier terme de $W^{(m)}$ est u^m et celui de $W^{(m+1)}$ est $u^{(m+1)}$.

Ainsi $\varphi W^{(m)}$ est égal à une fonction entière $V^{(m)}$, plus à une série infinie dont le premier terme est égal à

$$\frac{2.2.3.3\ldots m.m.u^{-(m+1)}}{3.3.5.5\ldots(2m-1)(2m+1)}.$$

Cette propriété de la fonction $W^{(m)}$ est importante dans la recherche des intégrales par approximation.

GNOMONIQUE.

Construction d'un cadran solaire à style quelconque, en s'assujettissant à la condition de n'employer que des droites pour les lignes horaires et les lignes de déclinaison ;

Par M. PEAUCELLIER.

A, B, C, a, b, c représentant les angles et les côtés opposés d'un triangle sphérique quelconque, les analogies de Neper conduisent aisément à la formule

$$\cot A \sin C = \sin b \cot a - \cos b \cos C.$$

Appliquons cette formule au triangle formé par les arcs de grands cercles passant par le pôle, le zénith et la position actuelle du Soleil. Soient D et Az la déclinaison et l'azimut du Soleil, P l'angle horaire et enfin L la latitude

du lieu. On pourra poser

$$A = 180^\circ - Az,$$
$$C = P,$$
$$a = 90^\circ - D,$$
$$b = 90^\circ - L,$$

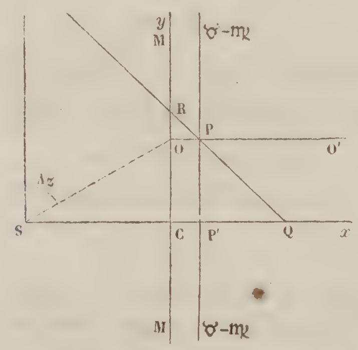
ce qui donne l'expression

$$-\cot Az \sin P = \cos L \tang D - \sin L \cos P,$$

ou bien

$$\cot Az = -\frac{\cos L}{\sin P} \tang D + \frac{\sin L}{\tang P}.$$

Cela posé, nous allons résoudre le problème pour le cas particulier où le style est vertical et le plan du cadran parallèle au méridien. Il sera facile ensuite de généraliser la solution.



Soient S la projection du style, MM la trace sur l'horizon du plan du cadran, que nous supposons rabattu autour de cette droite. L'ombre portée par le style sur le plan du cadran sera une droite OO′ perpendiculaire à MM. Le point C étant le pied de la perpendiculaire abaissée du point S sur la même droite, il est clair que l'on pourra poser CO = cot Az, pourvu que l'on conserve

dans la suite la distance SC pour unité linéaire. Cela étant, si l'on prend sur OO′ une longueur OP = tang D, la formule précédente devient

$$CO = -\frac{\cos L}{\sin P} OP + \frac{\sin L}{\tang P}$$

ou

$$y = -\frac{\cos L}{\sin P} x + \frac{\sin L}{\tang P},$$

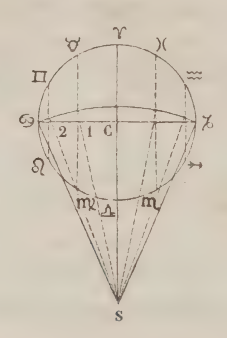
en considérant OP et CO comme les coordonnées du point P. Il en résulte que le lieu des points P obtenus à la même heure pendant le cours d'une année est une droite QR.

Le point P peut être considéré comme résultant de l'intersection de trois droites : l'ombre OO′ du style, la droite PP′ parallèle à MM et distante de cette droite d'une longueur égale à tang D, enfin la ligne horaire QR. D'où il résulte qu'en traçant une série de droites telles que PP′ et correspondant aux diverses valeurs de tang D, de même que les lignes horaires QR correspondant aux différentes heures de la journée, on obtiendra un réseau qui permettra de lire l'heure à un instant quelconque. Il suffira de voir sur quelle ligne horaire se trouve le point P, intersection de la ligne de déclinaison actuelle PP′ avec l'ombre OO′ du style.

Tracé des lignes de déclinaison. On a vu qu'elles sont parallèles à la droite MM et a une distance égale à la tangente de la déclinaison variable du Soleil. L'*Annuaire* fournit ces valeurs pour chaque jour de l'année; mais on peut se contenter des déclinaisons relatives à l'entrée du Soleil dans les différents signes du zodiaque. Voici comment on peut les construire géométriquement.

De part et d'autre de la droite SC, prise pour unité linéaire, on fait au point S un angle égal à la déclinaison

maximum 23° 28′. On élève en C une perpendiculaire sur SC et on la limite aux droites précédentes. Sur ♋♑



comme diamètre, on décrit un cercle que l'on divise en douze parties égales correspondant aux douze signes. On joint les points de division deux à deux et parallèlement à SC. Ces droites rencontrent l'arc de cercle décrit de S comme centre avec S♋ pour rayon en différents points qu'il suffit de joindre à S pour avoir les déclinaisons correspondantes. Les tangentes seront donc C1, C2, etc., qu'il faudra reporter, dans la figure précédente, sur CQ à partir de C à droite pour les valeurs positives de tang D, à gauche pour les valeurs négatives.

Tracé des lignes horaires. On a vu que leur équation était

$$y = -\frac{\cos L}{\sin P} x + \frac{\sin L}{\tang P}.$$

Pour avoir les points où elles coupent la ligne MM, il suffit de faire $x = 0$, ce qui donne l'expression $\frac{\sin L}{\operatorname{tang} P}$ ou $\sin L \cot P$ que l'on construit immédiatement, en prenant pour P les diverses valeurs 15, 30, 45 degrés, etc., si l'on veut les lignes horaires, espacées d'heure en heure. Pour avoir les points où elles coupent la droite Cx, on

fera $y = 0$, ce qui donne l'expression $\tang L \cos P$, dont la construction est tout aussi facile.

Nous n'insisterons pas davantage sur le tracé de ces droites, non plus que sur quelques-unes de leurs propriétés que l'on trouve aisément. Remarquons toutefois que l'enveloppe des lignes horaires est une hyperbole dont l'équation est

$$y^2 - x^2 \cos^2 L + \sin^2 L = 0.$$

Cas général où le style et le plan du cadran sont quelconques.

Quelle que soit la direction du style, il existe toujours un point de la Terre pour lequel elle est verticale. Concevons à côté du style un plan parallèle au méridien de ce point et portant le tracé dont on vient d'exposer les détails ; ce cadran fictif donnerait l'heure du lieu pour lequel la direction du style est verticale. Il donnerait l'heure même du lieu où il se trouve, si, au lieu de tracer les lignes horaires correspondant à 15, 30, 45 degrés, etc., on trace celles qui correspondent à $15° + \lambda$, $30° + \lambda$, $45° + \lambda$, etc., λ étant la différence de longitude des deux lieux. Ces lignes seraient marquées I, II, III, etc., et donneraient les heures entières.

Enfin, ce plan fictif peut être remplacé par un plan tout à fait arbitraire en prenant pour réseau de droites sur ce plan la perspective du réseau précédent, l'œil étant supposé en un point quelconque du style. Cette propriété se démontre aisément.

Les lignes de déclinaison étant parallèles, dans le premier cas que nous avons considéré, leur perspective sur un plan devient un faisceau de droites passant par un point déterminé. Les lignes horaires deviennent les tan-

gentes à une courbe du second degré qui, dans des cas particuliers, devient un cercle.

Le point d'où on fait la projection conique pouvant être choisi arbitrairement sur le style, on voit qu'il existe une infinité de solutions du problème pour un plan et un style donnés.

Si l'on voulait n'employer que des cercles, il suffirait de prendre les réciproques des droites, le pôle étant à l'intersection du plan et du style. Tous les cercles passeraient par ce point.

On voit que la construction de ce cadran à style quelconque conduit à des opérations de géométrie descriptive qui, au premier abord, semblent assez compliquées. Cependant une étude un peu plus approfondie du problème fait ressortir de nombreuses simplifications; on peut même, à la rigueur, se dispenser complétement du plan auxiliaire dont on a parlé plus haut. La première application mettrait ces faits en évidence.

Enfin, il resterait à considérer bien des cas particuliers présentant tous plus ou moins d'intérêt; entre autres on peut citer le gnomon ordinaire, le comparer avec le cadran horizontal dit astrolabe, etc. Le lecteur remplira sans difficulté les lacunes de ce petit travail.

Note du Rédacteur. Notre expédition en Tauride a fait voir combien il est nécessaire en campagne de savoir tracer des cadrans solaires. La méthode aussi simple qu'ingénieuse qu'on vient de lire est bien propre à propager ce genre de connaissances et se recommande comme telle aux professeurs de cosmographie et de géométrie descriptive. Nous rappelons à cette occasion l'ouvrage si complet de M. Born, mort général d'artillerie le 21 mars 1854. (Voir *Nouvelles Annales*, t. V, p. 483; 1846.)

PROBLÈME SUR LES COTÉS D'UN TRIANGLE ÉLEVÉS A DES PUISSANCES DONNÉES;

Par M. POUDRA.

[Les signes au-dessus ou au-dessous des lettres α, β, γ, d et o sont des accents.

Les signes au-dessus des lettres a, b, c seulement sont des exposants.]

1°. Partager chaque côté d'un triangle ABC en parties proportionnelles aux puissances successives des côtés adjacents.

2°. Déterminer, dans l'intérieur de ce triangle, la suite des points qui sont tels, que les perpendiculaires abaissées de chacun d'eux sur les côtés soient entre elles comme les puissances successives de ces côtés, de sorte que si on les joint aux sommets du triangle par des droites, sa surface sera partagée en trois autres triangles dont les surfaces seront entre elles comme les puissances successives des côtés respectifs du triangle donné.

3°. Trois nombres a, b, c étant représentés par les trois côtés d'un triangle ABC, on demande de trouver géométriquement la puissance m à laquelle il faut les élever également pour qu'il existe entre eux la relation

$$a^m + b^m = c^m,$$

ou, généralement,

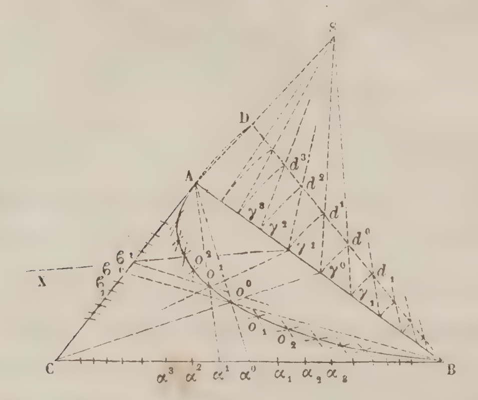
$$\mathrm{A}a^m + \mathrm{B}b^m = \mathrm{C}c^m.$$

Solutions.

1°. Soit ABC le triangle dont les côtés respectifs opposés sont a, b, c. Considérons d'abord le côté $\mathrm{AB} = c$ et soient γ^0 son milieu et γ^1 son intersection avec la bissectrice de l'angle C opposé. On aura déjà

$$\frac{\gamma^0 \mathrm{A}}{\gamma^0 \mathrm{B}} = \frac{b^0}{a^0} = 1, \quad \frac{\gamma^1 \mathrm{A}}{\gamma^1 \mathrm{B}} = \frac{b^1}{a^1}.$$

Par le sommet B menons une droite quelconque BD sur laquelle nous portons BD = BA, $Bd^0 = B\gamma^0$,



$Bd^1 = B\gamma^1$. Les deux droites AD et $\gamma^0 d^1$ prolongées déterminent le point S. Traçons la droite $S\gamma^1$ qui coupe BD en d^2. Sur AB, on rapporte $B\gamma^2 = b\,d^2$, on tire la droite $S\gamma^2$ qui coupe BD en d^3. La droite Sd^3 donne $B\gamma^3$. La droite $S\gamma^3$ déterminera d^4 et, sur AB on rapporte $B\gamma^4 = Bd^4$, et ainsi de suite indéfiniment.

Pour avoir des divisions analogues sur AB entre γ^0 et B, on porte sur BD la longueur $Bd^0 = B\gamma^0$, on tire Sd^0 ce qui donne sur AB le point γ_1. On prend $Bd_1 = B\gamma_1$. La droite Sd_1 détermine sur AB le point γ_2, et ainsi de suite indéfiniment.

Les deux divisions sur BA et BD sont perspectives réciproques pour le point de vue S. Donc on a entre quatre points de l'une et les homologues de l'autre le rapport anharmonique

$$\frac{Dd^1}{Bd^1} : \frac{Dd^2}{Bd^2} = \frac{A\gamma^0}{B\gamma^0} : \frac{A\gamma^1}{B\gamma^1} = \frac{b^0}{a^0} : \frac{b^1}{a^1} = 1 : \frac{b^1}{a^1};$$

or

$$Dd^1 = A\gamma^1,\ Bd^1 = B\gamma^1,\ Dd^2 = A\gamma^2 = \frac{Bd^2}{B\gamma^2}.$$

Donc

$$\frac{A\gamma^1}{B\gamma^1} : \frac{A\gamma^2}{B\gamma^2} = 1 : \frac{b^1}{a^1};$$

et comme

$$\frac{A\gamma^1}{B\gamma^1} = \frac{b^1}{a^1},$$

il en résulte

$$\frac{A\gamma^2}{B\gamma^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

En prenant les points γ^1, γ^2 et les homologues d^2, d^3 on trouverait de même

$$\frac{A\gamma^3}{B\gamma^3} = \frac{b^3}{a^3},$$

et ainsi de suite

$$\frac{A\gamma^4}{B\gamma^4} = \frac{b^4}{a^4}, \qquad \frac{A\gamma^5}{B\gamma^5} = \frac{b^5}{a^5}, \ldots;$$

donc on aura

$$\frac{A\gamma^0}{B\gamma^0} = \frac{b^0}{a^0}, \quad \frac{A\gamma^1}{B\gamma^1} = \frac{b^1}{a^1},$$

$$\frac{A\gamma^2}{B\gamma^2} = \frac{b^2}{b^2}, \quad \frac{A\gamma^3}{B\gamma^3} = \frac{b^3}{a^3},$$

$$\frac{A\gamma^4}{B\gamma^4} = \frac{b^4}{a^4}, \ldots.$$

On trouverait de même

$$\frac{A\gamma_1}{B\gamma_1} = \frac{b^{-1}}{a^{-1}} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{A\gamma_2}{B\gamma_2} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \frac{A\gamma_3}{B\gamma_3} = \frac{a^3}{b^3}, \ldots.$$

On diviserait de même les côtés a et b.

2°. Chacun des côtés du triangle ABC étant ainsi di-

visé suivant les puissances successives des côtés adjacents, on joint ces divisions avec le sommet opposé. On démontrera facilement que chaque groupe de trois droites respectives correspondant à une même puissance des côtés adjacents se rencontre en un même point. Soient o, o^1, o^2, o^3, etc., ces points d'intersection.

Appelons p^0, p^1, p^2, etc., les longueurs des perpendiculaires abaissées des points α^0, α^1, α^2, etc., sur le côté AC, et q^0, q^1, q^2, etc., celles abaissées des mêmes points sur AB. On aura

$$p^0 = \alpha^0 C . \sin C, \quad p^1 = \alpha^1 C . \sin C, \quad p^2 = \alpha^2 C . \sin C,$$
$$q^0 = \alpha^0 B . \sin B, \quad q^1 = \alpha^1 B . \sin B, \quad q^2 = \alpha^2 B . \sin B,$$

d'où

$$\frac{p^0}{q^0} = \frac{\alpha^0 C}{\alpha^0 B} . \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\alpha^0 C}{\alpha^0 B} . \frac{c}{b},$$
$$\frac{p^1}{q^1} = \frac{\alpha^1 C}{\alpha^1 B} . \frac{c}{b}, \ldots,$$

et

$$\frac{\alpha^0 C}{\alpha^0 B} = \frac{b^0}{a^0} = 1,$$
$$\frac{\alpha^1 C}{\alpha^1 B} = \frac{b^1}{a^1}, \quad \frac{\alpha^2 C}{\alpha^2 B} = \frac{b^2}{a^2}, \ldots;$$

donc

$$\frac{p^0}{q^0} = \frac{c}{b}, \quad \frac{p^1}{q^1} = \frac{b^0}{c^0} = 1,$$
$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{b^1}{c^1}, \quad \frac{p^3}{q^3} = \frac{b^2}{c^2}, \ldots,$$

c'est-à-dire : le rapport des perpendiculaires est égal à celui des côtés sur lesquels elles tombent, élevés à une puissance moindre d'une unité que celle de la division α correspondante.

Il en serait de même pour les rapports des perpendiculaires abaissées des points de division de AB et AC sur les côtés adjacents.

Remarquons que le rapport des perpendiculaires abaissées d'un des points tels que α sur les côtés adjacents est le même que celui des deux perpendiculaires abaissées de tout autre point de la droite $A\alpha$, par conséquent du point o. On en conclut donc : Les perpendiculaires abaissées des divers points o^0, o^1, o^2, etc., sur les trois côtés du triangle, sont entre elles comme les puissances 0, 1, 2, 3, etc., des côtés, mais une unité de moins que celle de la division qui a servi à déterminer ce point o. Ainsi du point o^0 elles sont proportionnelles aux puissances zéro des côtés ; elles sont donc égales. Du point o_1, elles sont proportionnelles aux côtés, de o^2 au carré, de o^3 au cube, et ainsi de suite. (C'est pourquoi on a inscrit o accentué zéro pour le point correspondant à l'intersection des droites $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$, et o^1 pour celles $A\alpha^2$, $B\beta^2$, $C\gamma^2$.)

Si on joint les points o aux sommets du triangle ABC on partagera sa surface en trois autres triangles ayant chacun pour base un des côtés et dont les surfaces seront proportionnelles aux puissances successives de ces côtés, puissance qui sera indiquée par le nombre d'unités de l'indice de o. Ainsi o^m sera le sommet commun de trois triangles dont les surfaces seront proportionnelles aux puissances m des côtés.

3°. En réunissant tous les points o, on obtiendra une courbe transcendante ayant les deux points A et B pour points asymptotiques.

En prenant CA et CB pour les axes des coordonnées, on trouve facilement que l'équation de cette courbe résulterait de l'élimination de m entre deux des trois équations

$$yb^m = x \,.\, c^m,$$

$$a^{m+1} \,.\, y = c^{m+1} \,.\, b - c^m \,.\, b \,.\, x,$$

$$a^m \,.\, x = c \,.\, b^{m+1} - cb^m\, y - b^{m+1} \,.\, x,$$

qui sont les équations des trois droites $A\alpha^{m-1}$, $B\beta^{m-1}$, $C\gamma^{m-1}$.

La bissectrice de l'angle C détermine sur le côté AB le point γ'. De même celle de l'angle B détermine sur AC le point β'. La droite $\gamma^1\beta^1$ qui joint ces deux points jouit alors de cette propriété, que la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de cette droite, compris entre AC et CB, sur le côté CB, est égale à la somme des perpendiculaires abaissées du même point sur les deux autres. (Ce serait la différence si le point était extérieur au triangle ABC.) Donc le point o^m où elle coupe la courbe des points o, jouit de cette propriété, mais pour o^m les perpendiculaires sont proportionnelles aux puissances m des côtés; donc pour cette puissance m on aura

$$a^m + b^m = c^m.$$

Ainsi dans le cas représenté dans la figure, on a

$$a = 5, \quad b = 2, \quad c = 3,$$

et on trouve que la droite $\gamma^1\beta^1$ passe par le point o^2 et qu'ainsi on a

$$5^2 = 2^2 + 3^2 = 25.$$

En général, on voit que si l'on construisait la courbe représentant le lieu des points qui jouissent d'une relation donnée entre les simples perpendiculaires abaissées sur les trois côtés du triangle, cette courbe rencontrerait celle des points o en un ou plusieurs points qui donneraient la puissance m à laquelle il faudrait élever les côtés pour avoir, entre les résultats, la relation donnée.

SUR LA CLASSIFICATION DES COURBES PLANES.

Un abonné demande si l'on possède une méthode générale pour classer les courbes.

On n'a étudié jusqu'aujourdhui que les courbes du deuxième, troisième et quatrième degré, et on les a classées. On connaît les travaux de Newton, d'Euler, et dans notre temps ceux de M. Plucker. M. Chasles m'a montré une belle classification, non encore éditée, des courbes du troisième degré. Du reste, toute classification a quelque chose d'arbitraire, dépend du point de vue, des propriétés que l'on veut considérer comme fondamentales. Les propriétés asymptotiques semblent devoir être dominantes, selon que les branches sont elliptiques, hyperboliques ou paraboliques; viennent ensuite en sous-ordre les divers points singuliers qui font établir des classes, des genres et des espèces, et des sous-espèces. Le nombre des espèces doit aller indéfiniment en augmentant, et atteint probablement déjà le nombre mille pour le cinquième degré. Les rayons de courbure fournissent peut-être de bons moyens de classement, d'autant mieux que ce moyen est applicable aux courbes à double courbure et aux surfaces. Les points singuliers dérivent de certaines valeurs des rayons de courbure.

Exemple. Les courbes du second degré ont deux rayons de courbure infinis, quatre ou aucun, ce qui donne trois genres.

Prochainement quelques mots sur ce qu'on doit entendre par *degré* d'une courbe à double courbure.

CONSTRUCTION APPROXIMATIVE POUR LA QUADRATURE DU CERCLE;

D'après M. WILLICH.

Soient AB une corde égale au rayon, E le milieu de cette corde, C le milieu de l'arc AB; à partir de C, portez encore deux fois le rayon sur la circonférence jusqu'en D, de sorte que l'arc CAD est 120 degrés et AD est 90 degrés; joignez DE qui rencontre la circonférence en F; DF sera presque égal au côté du carré équivalent au cercle.

On trouve DF = 1,77198 au lieu de 1,77245.

SOLUTION DES QUESTIONS 321 ET 322

(voir p. 154);

Par M. GROLOUS,
Élève du lycée Charlemagne (classe de M. Rouché).

321. Dans un hexagone *gauche* ABC*abc* ayant les côtés *opposés* AB et *ab*, BC et *bc*, C*a* et *c*A égaux et parallèles, les milieux D, E, F, *d*, *e*, *f* des côtés sont dans un même plan.

Il suffit évidemment de prouver que le plan qui passe par trois milieux consécutifs quelconques D, E, F contient le point milieu suivant *d*. Or le plan des côtés opposés AB, *ab* coupe les plans parallèles A*cb*, *a*CB suivant deux droites A*b*, *a*B dont le parallélisme entraîne celui des droites A*b*, EF; d'ailleurs DE est parallèle à AC; les plans DEF, CA*b* sont donc parallèles.

Le parallélisme des plans EFd, CbA résulte pareillement de celui des droites Ab, EF et Cb, Fd; par suite, les deux plans DEF, EFd, qui ont une droite commune EF et qui sont parallèles à un même plan CAb, coïncident.

On peut remarquer que l'hexagone plan DEFdef, dont les sommets sont les milieux des côtés de l'hexagone gauche, a aussi ses côtés opposés égaux et parallèles.

Note du Rédacteur. Cette question a été résolue à peu près de la même manière par M. L.-P. Deparis, élève (*).

---

322. Dans un polygone *gauche* ABCD ... $abcd$...., d'un nombre *pair* de côtés, ayant les côtés opposés AB et ab, BC et bc, CD et cd, etc., égaux et parallèles, les droites Aa, Bb, Cc, etc., qui joignent les sommets opposés, et celles qui joignent les milieux L, M, N, etc., l, m, n, etc., des côtés opposés, passent par un seul et même point.

En effet, les quadrilatères ABab, BCbc, CDcd, etc., sont des parallélogrammes puisqu'ils ont chacun deux côtés égaux et parallèles; chacune des lignes Aa, Bb, Cc, etc., est donc à la fois diagonale de deux parallélogrammes successifs, en sorte que le milieu O de la première est aussi le milieu de la seconde, il est donc le milieu de la troisième, et ainsi de suite de proche en proche. D'ailleurs les droites Ll, Mm, Nn, etc., qui joignent les milieux des côtés opposés, passent toutes par le centre commun O de ces divers parallélogrammes.

(*) Les questions 321 et 323, proposées par M. Amiot dans sa classe au lycée Saint-Louis, m'ont été communiquées. TM.

SOLUTION DE LA QUESTION 323

(voir page 154);

PAR M. DEVAUX,
Élève du lycée Charlemagne (classe de M. Rouché).

Soient C et c les centres, R et r les rayons des deux cercles; T et t les points où la tangente extérieure $\mathrm{N}n$ rencontre les deux côtés de l'angle droit $\mathrm{TO}t$ formé par les deux tangentes intérieures; N et n sont les points de contact. L'aire du triangle $\mathrm{TO}\,t$ a pour mesure le produit de l'hypoténuse $\mathrm{T}\,t$ par la moitié de la perpendiculaire OH abaissée du sommet de l'angle droit. Or le trapèze rectangle $\mathrm{NC}\,cn$ donne pour cette hauteur

$$\mathrm{OH} = \frac{\mathrm{O}c.\mathrm{CN} + \mathrm{OC}.cn}{\mathrm{OC} + \mathrm{O}c} = \frac{r}{\mathrm{R}+r}\mathrm{R} + \frac{r}{\mathrm{R}+r}r = \frac{2\mathrm{R}r}{\mathrm{R}+r}.$$

D'ailleurs, en ajoutant les relations

$$\mathrm{T}t + tn = \mathrm{R} + r + \mathrm{TN}, \quad \mathrm{T}t + \mathrm{TN} = \mathrm{R} + r + tn \ (^*)$$

on obtient, pour la base,

$$\mathrm{T}t = \mathrm{R} + r.$$

L'aire du triangle $\frac{1}{2}\mathrm{OH}.\mathrm{T}\,t$ est donc équivalente au rectangle $\mathrm{R}r$ des rayons.

Dans le cas où les tangentes intérieures, au lieu d'être rectangulaires, se coupent dans l'angle 2α, la même méthode donne

$$\mathrm{R}\,r\cot\alpha$$

(*) Soit I le point où la tangente OT touche le cercle c; on a

$$\mathrm{T}n = \mathrm{TI} = \mathrm{TN} + \mathrm{R} + r;$$

les tangentes OT, O t sont inclinées de 45 degrés sur la droite des centres.

pour la mesure de l'aire du triangle correspondant TOt.

La surface du triangle formé par une tangente intérieure et deux tangentes extérieures est donnée par une formule semblable. Soient T' le point symétrique de T par rapport à la ligne des centres, O' le point de concours et $2\alpha'$ l'angle des deux tangentes extérieures. La surface du triangle $T'tO'$ est égale au produit du demi-périmètre par le rayon r du cercle inscrit. Or, en ajoutant les relations

$$O't = O'N - tN, \quad tT' = tN + TN, \quad T'O' = O'N - TN,$$

on trouve pour le demi-périmètre

$$O'N \quad \text{ou} \quad R \cot \alpha'.$$

L'aire cherchée a donc pour expression

$$Rr \cot \alpha',$$

qui se réduit à Rr lorsque les tangentes extérieures se coupent à angle droit.

L'aire du quadrilatère formé par les quatre tangentes est donc

$$Rr(\cot \alpha' - \cot \alpha) = Rr \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin \alpha \sin \alpha'}.$$

Lorsque les deux cercles se touchent extérieurement il faut faire $2\alpha = 180°$.

Note du Rédacteur. M. Richard-P. Oxamendi, de Cuba, démontre que l'aire du triangle TOt est égale au rectangle des perpendiculaires abaissées de T et de t sur la ligne des centres, et ensuite que ce rectangle est égal à celui des rayons par des considérations polaires.

SOLUTION TRIGONOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 323

(voir page 154) ;

PAR M. L'ABBÉ L. SERVIER,
Professeur à Saint-Étienne.

Deux cercles étant dans un même plan, et les tangentes communes intérieures se coupant à angle droit, l'aire du triangle formé par ces tangentes et une tangente commune extérieure est équivalente au rectangle des rayons.

Soient O et O′ les centres des deux cercles de rayon R et R′ ; A le point d'intersection des deux tangentes intérieures ; C et C′ les points de contact de ces deux tangentes, d'un même côté de la ligne des centres ; D et D′ ceux de la tangente extérieure commune aux deux cercles ; soient enfin B et B′ les points respectifs d'intersection des droites AC et AC′ avec la droite BB′. C'est le triangle ABB′ dont l'aire est équivalente au rectangle des rayons.

En effet, dans le triangle ABO, on a (le triangle ACO étant isocèle)

$$(1) \qquad AB = AO \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)} = R\sqrt{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)};$$

le triangle AB′O donne semblablement

$$AB' = R'\sqrt{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha'}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha'}{2}\right)}.$$

α et α' désignent les angles analogues COD, C′O′D′; ces angles étant complémentaires, l'équation précédente peut s'écrire de la manière suivante :

$$(2)\qquad AB' = R'\sqrt{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Si nous multiplions membre à membre les équations (1) et (2), il vient, toute réduction faite, et après avoir divisé par 2

$$\frac{1}{2}AB \times AB' = R \times R'.$$

C. Q. F D.

QUESTIONS.

324. Quelles sont les phases de la Terre et les éclipses de Terre pour un spectateur placé dans la Lune?

325. Soit une équation algébrique $\varphi(x) = q$; tous les coefficients sont supposés entiers positifs, q est entier positif; t étant un nombre entier positif, si l'on a

$$\varphi(t) < q, \quad \varphi(t+1) > q,$$

faisant

$$h = \frac{q - (\varphi)(t)}{\varphi(t+1) - \varphi(t)},$$

$t + h$ sera une valeur approchée de x comprise entre t et $t + 1$; discuter cette méthode d'approximation donnée par Cardan.

326. Si les racines d'une équation du troisième degré sont de la forme p^2, q^2, $2pq$, les racines de la dérivée sont rationnelles. (Prouhet.)

327. Si les racines d'une équation du quatrième degré sont de la forme p^2, q^2, p^2+2pq, q^2+2pq, les racines de la dérivée sont rationnelles. (PROUHET.)

328. Connaissant la somme de deux nombres et le produit de la somme de leurs carrés par la somme de leurs cubes, trouver ces nombres. (CARDAN.)

329. Dans une progression géométrique de quatre termes on donne la somme des antécédents et la somme des conséquents, trouver ces termes sans opérer d'élimination. (CARDAN.)

330. i étant la racine réelle de l'équation cubique

$$x^3+qx+r=0,$$

les deux autres racines sont

$$-\frac{i}{2}\pm\frac{1}{2}\left[\frac{4q^2-9ri+6qi^2}{\sqrt{-(4q^2+27r^2)}}\right].$$

(LEBESGUE.)

SUR LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES NOMBRES NATURELS;

PAR E. CATALAN.

La plupart des traités d'algèbre donnent la relation générale

$$(n+1)[(n+1)^p-1]$$

$$=\frac{p+1}{1}S_p+\frac{p+1}{1}\frac{p}{2}S_{p-1}+\ldots+\frac{p+1}{1}S_1,$$

dans laquelle S_p représente la somme des puissances p des n premiers nombres entiers. Cette relation permet de calculer assez rapidement les valeurs de S_1, S_2, S_3, S_4;

mais elle devient presque illusoire dès que l'indice p surpasse 4. Il y a dix ans, M. Puiseux, probablement frappé de cet inconvénient, donna, dans le *Journal* de M. Liouville, la valeur de S_p en fonction explicite de n et de p. Malheureusement, la méthode employée par ce savant géomètre est assez compliquée (*); en outre, les valeurs qu'il trouve pour les coefficients de S_p, très-satisfaisantes en théorie, le seraient fort peu s'il s'agissait de passer aux applications numériques (**).

La méthode suivante, dont le germe se trouve dans le grand ouvrage de Lacroix, sera peut-être, à cause de sa simplicité, capable d'intéresser les élèves.

I. On a identiquement

$$n^2 = n(n-1) + n.$$

En multipliant les deux membres par

$$n = (n-2) + 2 = (n-1) + 1,$$

on trouve

$$n^3 = n(n-1)\left(n-2 \begin{array}{l} +2 \\ +1 \end{array}\right| n(n-1) + n,$$

ou

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n.$$

Multipliant les deux membres de cette nouvelle égalité

(*) Cette observation, qui n'est pas une critique, s'applique également à un Mémoire de M. Pépin inséré dans les *Nouvelles Annales* (janvier 1856). Du reste, l'auteur, dont je n'ai connu le travail qu'après avoir terminé le mien, dit expressément, en parlant de la formule trouvée par M. Puiseux : « L'expression générale de la fonction $\varpi_{m,\alpha}$ est fort mal appropriée au calcul. »

(**) Par exemple, le coefficient 350 serait donné par ce calcul :

$$\frac{4^6 - 3.3^6 + 3.2^6 - 1}{1.2.3} = \frac{4096 - 2187 + 192 - 1}{6} = \frac{2100}{6} = 350.$$

par

$$n = (n-3) + 3 = (n-2) + 2 = (n-1) + 1,$$

on aura encore

$$n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) + \left.\begin{array}{r}3\\+3\end{array}\right|\, n(n-1)(n-2) + \left.\begin{array}{r}6\\+1\end{array}\right|\, n(n-1) + n,$$

ou

$$n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) + 6n(n-1)(n-2) \\ + 7n(n-1) + n.$$

La loi des résultats est actuellement évidente; de sorte qu'en désignant par $A_{n,p}$ le nombre des arrangements de n lettres, prises p à p, et par B_p, C_p,..., L_p, $(p-2)$ coefficients, indépendants de n, on peut écrire :

$$(A) \quad n^p = A_{n,p} + B_p A_{n,p-1} + C_p A_{n,p-2} + \ldots + L_p A_{n,2} + n.$$

II. Pour démontrer, par le raisonnement connu, la généralité de cette relation et pour trouver la loi des coefficients, supposons

$$n^{p-1} \\ = A_{n,p-1} + B_{p-1} A_{n,p-2} + C_{p-1} A_{n,p-3} + \ldots + K_{p-1} A_{n,2} + n,$$

et multiplions les deux membres de cette égalité par

$$n = (n-p+1) + (p-1) = (n-p+2) + (p-2) = \ldots \\ = (n-1) + 1,$$

nous aurons

$$n^p = A_{n,p} + \left.\begin{array}{r}(p-1)\\+B_{p-1}\end{array}\right|\, A_{n,p-1} + \left.\begin{array}{r}(p-2)\,B_{p-1}\\+C_{p-1}\end{array}\right|\, A_{n,p-2} + \ldots + \left.\begin{array}{r}2\,K_{p-1}\\+1\end{array}\right|\, A_{n,2} + n,$$

et, par conséquent,

$$(B) \quad \left\{\begin{array}{l} B_p = B_{p-1} + (p-1), \\ C_p = C_{p-1} + (p-2)\,B_{p-1}, \\ D_p = D_{p-1} + (p-3)\,C_{p-1}, \ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_p = 1 + 2\,K_{p-1}. \end{array}\right.$$

III. Ainsi que l'a fait remarquer Lacroix (*), le calcul des coefficients B_p, C_p,..., L_p est fort simple. En effet, si l'on suppose successivement

$$p = 1, 2, 3, 4, \ldots,$$

on trouve, par les formules (B),

p	A_p	B_p	C_p	D_p	E_p	F_p	G_p	H_p	K_p	L_p
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	6	7	1						
5	1	10	25	15	1					
6	1	15	65	90	31	1				
7	1	21	140	350	301	63	1			
8	1	28	266	1050	1701	966	127	1		
9	1	36	462	2646	6951	7770	3025	255	1	
10	1	45	750	19980	22827	42525	34105	9330	511	1

Il résulte, de la formation de ce tableau, que *le* $l^{\text{ième}}$ *terme d'une colonne verticale quelconque est égal au terme écrit au-dessus augmenté de* l *fois le terme placé à la gauche de celui-ci* (**). Par exemple

$$1701 = 301 + 4.350.$$

IV. Si l'on écrit ainsi les nombres contenus dans le

(*) Et aussi M. Pépin.

(**) Pour plus de régularité, on a représenté par A_p le coefficient de $A_{n,p}$ coefficient égal à l'unité. Le Mémoire de M. Pépin contient également le tableau ci-dessus.

tableau précédent :

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	7	15	31	63	127	255	511	
1	6	25	90	301	966	3025	9330		
1	10	65	350	1701	7770	34105			
1	15	140	1050	6951	42525				
1	21	266	2646	22827					
1	28	462	19980						
1	36	750							
1	45								
1									

on voit que les termes de la première ligne horizontale sont tous égaux à l'unité, et que ceux de la deuxième ligne sont égaux aux puissances successives de 2, diminuées de l'unité. En outre, *un terme quelconque* $N_{r,l}$ *occupant le rang* r *dans la* l^ième^ *ligne horizontale, est égal à* l *fois le terme écrit à sa gauche, augmenté du terme écrit au-dessus*. Il n'est pas bien difficile de conclure de là :

$$(C)\ N_{r,l} = \frac{1}{1.2.3\ldots(l-1)}\left[\begin{array}{c} l^{r+l-2} - \frac{l-1}{1}(l-1)\,l^{r+l-2} \\ + \frac{l-1}{1}\,\frac{l-2}{1}(l-2)^{r+l-2} - \ldots \pm 1 \end{array}\right].$$

Cette formule générale, beaucoup moins commode que la règle précédente, a été trouvée par M. Puiseux.

V. Revenant à l'équation (A), nous aurons, en chan-

geant n en $n-1$, $n-2$,..., 3, 2, 1, et ajoutant,

$$(D)\quad \begin{cases} S_p = \dfrac{1}{p+1} A_{n+1,p+1} + \dfrac{B_p}{p} A_{n+1,p} + \dfrac{C_p}{p-1} A_{n+1,p-1} + \ldots \\ \quad + \dfrac{L_p}{3} A_{n+1,3} + \dfrac{1}{2} A_{n+1,2} \end{cases}$$

ou

$$(E)\quad \begin{cases} S_p = \dfrac{1}{p+1}(n+1)n(n-1)\ldots(n-p+1) \\ \quad + \dfrac{B_p}{p}(n+1)n\ldots(n-p+2) \\ \quad + \dfrac{C_p}{p-1}(n+1)n\ldots(n-p+3) + \ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + \dfrac{L_p}{3}(n+1)n(n-1) + \dfrac{1}{2}(n+1)n. \end{cases}$$

Par exemple, la somme des sixièmes puissances des nombres 1, 2, 3,..., 10 sera

$$\begin{aligned} &\frac{1}{7}11.10.9.8.7.6.5 + \frac{15}{6}11.10.9.8.7.6 + \frac{65}{5}11.10.9.8.7 \\ &\quad + \frac{90}{4}11.10.9.8 + \frac{31}{3}11.10.9 + \frac{1}{2}11.10 \\ &= 110(2160 + 7560 + 6552 + 1620 + 93) + 55 \\ &= 1\,978\,405. \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} 1^6 + 2^6 + \ldots + 10^6 = 1 + 64 + 729 + 4096 + 15625 \\ + 46\,656 + 117\,649 + 262\,144 \\ + 531\,441 + 1\,000\,000 = 1\,978\,405. \end{aligned}$$

REMARQUES DIVERSES SUR LES NOMBRES PREMIERS

(voir p. 130);

Par M. V.-A. LEBESGUE (suite).

3. Théorème. *Chacune des formules*

$$8x+1, \quad 8x+3, \quad 8x+5, \quad 8x+7,$$

où x *est un entier, renferme une infinité de nombres premiers.*

Cette proposition dépend des trois propositions suivantes faciles à établir :

1°. La formule x^2-2 n'a aucun diviseur premier de forme $8k+3$, $8k+5$.

2°. La formule x^2+2 n'a aucun diviseur premier de forme $8k+5$, $8k+3$.

La démonstration est toute semblable à celle du théorème II.

Soit, s'il est possible, $p=8k+3$ un diviseur de x^2-2 plus petit qu'aucun diviseur des formes $8k+3$, $8k+5$; comme on peut toujours supposer x impair et plus petit que p, x^2-2 sera impair et de forme $8m+7$.

Dans l'équation

$$x^2-2=p.y,$$

y sera de forme $8k+5$ et inférieur à p (*). Ainsi, d'après l'hypothèse, y ne saurait être premier. Si y est composé, on verra qu'un de ses facteurs est nécessairement de forme $8k+3$, $8k+5$; p ne serait donc pas un diviseur de x^2-2 plus petit qu'aucun diviseur des formes $8k+3$, $8k+5$.

On prouve de même la proposition relative aux diviseurs premiers de x^2+2.

3°. Les formules x^2-a, x^2-am^2 sont simultané-

(*) Car on a $py+2<p^2$.

ment divisibles ou non divisibles par p, nombre premier à m et à a.

Si $x^2 - a$ est divisible par p, $(mx)^2 - am^2$ l'est aussi. Si $x^2 - am^2$ est divisible par p, $(kx)^2 - a(mk)^2$ l'est aussi, et l'on posera

$$mk = ph \pm 1.$$

4°. Il y a une infinité de nombres premiers de forme $8k + 1$.

$$x^4 + 1 = (x^2 - 1)^2 + 2x^2$$

n'a, d'après sa première forme, que des diviseurs $8k + 1$ ou $8k + 5$; d'après la seconde forme, il n'a pas de diviseurs $8k + 5$. Le nombre $x^4 + 1$ n'a donc que des diviseurs premiers de forme $8k + 1$. Si la suite finie de ces diviseurs était p_1, p_2,..., p_i, en posant

$$x = p_1 p_2 \ldots p_i,$$

on serait conduit à admettre que

$$(p_1 p_2 \ldots p_i)^4 + 1$$

est premier ou divisible par un des nombres premiers p_1, p_2,..., p_i, ce qui est impossible.

5°. Il y a une infinité de nombres premiers de forme $8k + 5$.

Démonstration de même espèce en partant de $x^2 + 1$ où l'on posera

$$x = 4y^4 + 2,$$

d'où

$$x^2 + 1 = 16y^4(y^4 + 1) + 5,$$

quantité non divisible par 5. On posera ensuite

$$y = p_1 p_2 \ldots p_i.$$

Les nombres p_i sont de forme $8k + 5$, 5 excepté.

6°. Il y a une infinité de nombres premiers de forme $8k + 3$.

En partant de la formule

$$x^2 + 2 = 8k + 3$$

pour x impair, on prouvera de même que la série des nombres premiers $8k + 3$ est illimitée.

7°. De même, pour prouver que les nombres premiers de forme $8k + 7$ sont en nombre illimité, on partira de la formule

$$x^2 - 2 = 8k + 7$$

pour x impair.

4. Théorème. *Sur la factorielle des nombres premiers.*

Le produit

$$1.2.3.4\ldots x = \Pi x$$

est ce qu'on nomme une *factorielle*.

Le produit

$$1.2.3.4.5.7.11\ldots p_x = \mathrm{P}x$$

est la factorielle des nombres premiers.

Par p_x, on indique le nombre premier qui approche le plus de x par défaut.

Le théorème suivant est dû à M. Tchebichef.

On a toujours

$$(a)\quad \left\{\begin{array}{l} \Pi x = \mathrm{P}(x).\mathrm{P}\left(\frac{x}{2}\right).\mathrm{P}\left(\frac{x}{3}\right)\cdots \\ \qquad \mathrm{P}(\sqrt{x}).\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right).\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{x}{3}}\right)\cdots \\ \qquad \mathrm{P}(\sqrt[3]{x}).\mathrm{P}\left(\sqrt[3]{\frac{x}{2}}\right).\mathrm{P}\left(\sqrt[3]{\frac{x}{3}}\right)\cdots \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Si l'on convient de représenter par $e\left(\frac{x}{\theta}\right)$ l'entier égal ou immédiatement inférieur à la quantité positive $\frac{x}{\theta}$, on voit tout de suite que si θ est un nombre premier inférieur

à x, l'exposant de θ dans le produit

$$\mathrm{P}(x) \cdot \mathrm{P}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\frac{x}{3}\right) \cdots$$

sera $e\left(\frac{x}{\theta}\right)$.

L'exposant de θ dans le produit

$$\mathrm{P}(\sqrt{x}) . \mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) \cdots$$

sera de même $e\left(\frac{x}{\theta^2}\right)$.

Et ainsi de suite, de sorte que l'exposant de θ dans le second membre de l'équation (a) sera

$$e\left(\frac{x}{\theta}\right) + e\left(\frac{x}{\theta^2}\right) + e\left(\frac{x}{\theta^3}\right) \cdots,$$

qui, comme on le sait, est l'exposant de θ dans le produit $1.2.3 \ldots x$.

Ce théorème a été introduit, je crois, dans l'*Arithmétique* de M. Bertrand, dont les traités élémentaires sont très-substantiels.

SOLUTION DE LA QUESTION 315

(voir p. 52);

PAR M. PAINVIN,
Professseur.

L'énoncé de la question n'est pas exact (*).

Soient :

x_i, y_i, z_i les coordonnées du point M_i;

(*) On a omis le facteur $n - 1$. TM.

x, y, z celles du point E;
X, Y, Z celles du point N;
A étant pris pour axe des coordonnées

$$X = \sum x_i, \quad Y = \sum y_i, \quad Z = \sum z_i,$$

je cherche le *minimum* de l'expression suivante :

$$F = \overline{M_1 E}^2 + \overline{M_2 E}^2 + \ldots + \overline{M_n E}^2 - p\,\overline{AE}^2,$$

$$F = \sum [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)]$$
$$- p(x^2 + y^2 + z^2);$$

cette expression devient, en développant et en posant

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = l_i^2,$$

$$F = \sum l_i^2 + (n-p)(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xX + yY + zZ)$$

ou

$$F = \sum l_i^2 - \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{n-p}$$
$$+ (n-p)\left[\left(x - \frac{X}{n-p}\right)^2 + \left(y - \frac{Y}{n-p}\right)^2 + \left(z - \frac{Z}{n-p}\right)\right];$$

sous cette forme on voit immédiatement que le *minimum* de l'expression F s'obtiendra en posant

$$x = \frac{X}{n-p}, \quad y = \frac{Y}{n-p}, \quad z = \frac{Z}{n-p}.$$

Le point E ne coïncidera avec le point N que lorsqu'on fera $p = n - 1$.

Note du Rédacteur. M. Félix Lucas, élève de l'École Polytechnique, est parvenu au même résultat.

PREUVE ÉLÉMENTAIRE DE LA ROTATION DE LA TERRE PAR LES OSCILLATIONS DU PENDULE LIBRE;

PAR M. L'ABBÉ SOUFFLET,
Docteur ès Sciences mathématiques,
Professeur au collége Saint-Vincent, à Rennes.

1°. Si je développe un cône droit à base circulaire sur son plan tangent, j'obtiens un secteur dont l'arc est égal à la circonférence $2\pi R$ de la base et dont le rayon est le côté a du cône. L'angle x du secteur est donc

$$360^\circ \times \frac{R}{a},$$

d'après la proportion

$$x : 360^\circ :: 2\pi R : 2\pi a;$$

et comme le rapport $\frac{R}{a}$ est par définition le sinus de l'angle θ du cône, nous aurons

$$x = 360^\circ \sin\theta.$$

2°. Il s'ensuit que le côté a, en faisant une révolution autour du cône, décrit un angle égal à $360^\circ \sin\theta$; en effet, la somme des angles très-petits qu'il décrit à chaque instant de son mouvement est égale à l'angle du secteur : le mouvement de a qui décrit le secteur est donc le même que celui qui décrit le cône et peut le remplacer.

3°. Le côté a décrivant le cône et emportant avec lui une normale au cône la fait tourner sur elle-même d'un angle $360^\circ \sin\theta$ égal à celui qu'il décrit; en effet, cette normale et la tangente déterminent un plan qui tourne à chaque instant sur la normale d'un angle égal à celui que

décrit a dans le secteur : ainsi un cône faisant une révolution sur son axe, une perpendiculaire à sa surface tourne sur elle-même d'un angle égal au développement du cône ou de $360^\circ \sin\theta$.

4°. Si la rotation du cône sur son axe (*) est uniforme et dure vingt-quatre heures, la durée t de la rotation complète d'une normale sera donnée par la proportion

$$t : 24^h :: 360^\circ : 360^\circ \sin\theta,$$

et l'on aura

$$t = \frac{24^h}{\sin\theta} = 32^h,2362$$

pour

$$\theta = 48^\circ\, 7'.$$

Cette durée varie de vingt-quatre heures à l'infini pendant que θ passe de 0 à 90 degrés.

5°. Concevons maintenant un cône circonscrit à la terre suivant un parallèle, pendant que ce cône avec la terre fera une révolution sur son axe. Le fil à plomb tournera sur lui-même de $360^\circ \sin\theta$; θ étant l'angle du cône ou la latitude du parallèle. Ainsi la latitude de Rennes étant $48^\circ\, 7'$, la révolution complète du fil à plomb sur lui-même y dure $32^h,2362$ (heures sidérales) ou $32^h\, 9^m$ (heures communes). Au pôle, cette durée est de vingt-quatre heures sidérales, et à l'équateur le mouvement est nul : tels sont les corollaires des paragraphes précédents.

6°. Mais l'inertie du mouvement oscillatoire du pendule libre ne permet pas à son plan d'oscillation de tourner sur sa verticale ; ce plan paraîtra donc tourner au-

---

(*) La normale change à chaque instant de direction, et, par conséquent, l'angle qu'elle fait avec la direction primitive varie, et la normale mobile tourne autour de la normale considérée comme fixe.

dessus de l'horizon et accusera, par conséquent, la rotation de la terre sur son axe. C'est ce que constate l'expérience de M. Foucault.

QUESTIONS.

331. Soient les jours relatifs au soleil vrai, au soleil fictif dans l'écliptique, au soleil fictif dans l'équateur. Quand ces jours considérés deux à deux sont-ils égaux? Quand les trois jours sont-ils égaux?

332. Soit

$$X = MN^k;$$

M et N sont des fonctions algébriques entières de x n'ayant pas de facteurs communs; k est un nombre entier positif. Désignons par P le plus grand commun diviseur de X et de $\frac{dX}{dx}$; faisons

$$Q = \frac{X}{P}, \quad R = \frac{dX}{P\,dx};$$

alors N est le plus grand commun diviseur de Q et de $R - k\,\frac{dQ}{dx}$. (Ostrogradsky.)

333. Étant donnée une ligne d'intersection de deux surfaces de degrés m et n, quels sont les degrés respectifs des surfaces formées par les normales principales, les tangentes de la courbe et les axes des plans osculateurs?

334. Étant donnés un triangle ABC et un point quelconque C dans l'intérieur du triangle, on mène les transversales AOa, BOb, COc; on a l'identité

$$\frac{1}{AO\,b} + \frac{1}{BO\,c} + \frac{1}{CO\,a} = \frac{1}{AO\,c} + \frac{1}{BO\,a} + \frac{1}{CO\,b}.$$

(Mannheim.)

MÉTHODE DE M. CAUCHY

Pour modifier la méthode de Newton dans la résolution des équations numériques ;

PAR M. HOUSEL,
Professeur.

1. On sait que la méthode de Newton est quelquefois en défaut, c'est-à-dire que la correction qu'elle fournit, ajoutée à la première valeur approchée de la racine, donne quelquefois une somme plus éloignée de cette racine que les limites qui la comprennent. Aussi divers mathématiciens, tels que Fourier, ont cherché avec plus ou moins de succès à la perfectionner en écartant ces causes d'erreur. M. Cauchy a résolu complétement ce problème; mais, quoique son travail soit publié depuis vingt ans, quoique M. l'abbé Moigno ait essayé plusieurs fois, et notamment dans le tome X des *Nouvelles Annales,* de diriger sur ce sujet l'attention du monde savant, ce procédé n'est pas connu comme il devrait l'être, et nous croyons utile de le rappeler, en y joignant quelques observations et surtout la manière de resserrer une racine entre deux valeurs, l'une supérieure, l'autre inférieure.

2. Soit

$$y = f(x)$$

une fonction quelconque algébrique ou transcendante ; on demande la plus petite racine α de l'équation

$$f(x) = 0$$

comprise entre deux valeurs de x, a et A.

Nous remarquerons que cette question, étant résolue d'une manière générale, dispensera de la séparation des racines : en effet, dès qu'on aura trouvé avec une approximation suffisante la plus petite racine α comprise entre a et A, en ajoutant à cette racine α une quantité suffisamment petite, on obtiendra sans peine une valeur a' telle, que a et a' ne contiennent que la seule racine α. Donc on pourra trouver entre a' et A une seconde racine, et ainsi de suite, s'il y a lieu.

On peut toujours supposer α positif, sauf à changer le signe de x si cela est nécessaire; dès lors A sera positif: mais on peut aussi supposer $a \geqq 0$, car rien n'empêche de partir de la valeur $a = 0$. Enfin, observons que l'on peut encore supposer $f(a) > 0$: en effet, considérons la courbe dont l'équation est

$$y = f(x);$$

si $f(a)$ est négatif, il suffira de changer le sens des ordonnées, ce qui revient à changer le signe de tous les termes de $f(x)$.

3. Cela posé, toute la méthode est fondée sur le théorème suivant qui se trouve dans quelques Algèbres, mais que nous croyons devoir démontrer ici, parce qu'il n'est pas très-répandu.

Soient R *la plus petite et* S *la plus grande valeur que reçoit la fonction dérivée* $f'(x)$ *lorsque* x *croît par degrés insensibles depuis* a *jusqu'à* A; *la valeur du rapport*

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

sera toujours comprise entre R *et* S, *si* x *est compris entre* a *et* A.

En effet, $f'(x)$ étant la limite du rapport de l'accroissement de $f(x)$ à celui de x, on peut toujours trouver un

nombre h assez petit pour que l'on ait

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > f'(x) - \varepsilon$$

et

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} < f'(x) + \varepsilon,$$

ε étant une quantité aussi petite que l'on voudra. Donc, à plus forte raison,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > \mathrm{R} - \varepsilon$$

et

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} < \mathrm{S} + \varepsilon.$$

D'après cela, concevons que l'on interpose entre les limites a et x des valeurs croissantes de x, savoir $x_1, x_2, \ldots, x_n$ assez rapprochées pour que les conditions précédentes soient toujours remplies quand on prendra l'une de ces valeurs pour x et la suivante pour $x+h$. Les fractions

$$\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}, \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \ldots, \quad \frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}$$

seront toutes plus grandes que $\mathrm{R}-\varepsilon$ et toutes plus petites que $\mathrm{S}+\varepsilon$.

Or, comme toutes ces fractions ont des dénominateurs positifs, si l'on divise la somme de leurs numérateurs par la somme de leurs dénominateurs, on obtiendra une nouvelle fraction qui sera elle-même comprise entre $\mathrm{R}+\varepsilon$ et $\mathrm{S}+\varepsilon$; car si l'on additionne les inégalités

$$\begin{gathered}
f(x_1)-f(a) > (x_1-a)(\mathrm{R}-\varepsilon), \\
f(x_2)-f(x_1) > (x_2-x_1)(\mathrm{R}-\varepsilon), \ldots, \\
f(x)-f(x_n) > (x-x_n)(\mathrm{R}-\varepsilon),
\end{gathered}$$

on aura, en réduisant,

$$f(x)-f(a)>(x-a)(\mathrm{R}-\varepsilon)$$

ou

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>\mathrm{R}-\varepsilon.$$

De même

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<\mathrm{S}+\varepsilon;$$

donc à la limite, pour $\varepsilon=0$, on trouvera le théorème énoncé.

4. Ainsi, x étant compris entre a et A, $\mathrm{F}(x)$ sera une des valeurs que prendra $f'(x)$ pour x compris entre a et A; or, puisque $f(a)>0$, α étant la plus petite racine ou, ce qui revient au même, α étant la première racine de $f(x)=0$ depuis a jusqu'à A, on voit que $f(x)$ diminue quelque part entre a et α, et, par conséquent, $f'(x)$ prend des valeurs négatives dans ce même intervalle.

5. Cela posé, l'équation

$$y=f(x)$$

de la courbe que nous considérons pouvant être mise sous la forme

$$y=f(a)+(x-a)\,\mathrm{F}(x),$$

comparons-la avec l'équation

$$y_1=f(a)+(x-a)\,m$$

d'une droite qui partira évidemment du même point que la courbe, puisque $x-a$ donnera

$$y=y_1=f(a),$$

et cherchons quel doit être le coefficient m pour que la droite rencontre l'axe des x avant le point de la courbe

qui correspond à $x = \alpha$. Il suffit pour cela que, dans l'intervalle de a jusqu'à α, on ait toujours $y_1 < y$, car si cette condition est remplie, l'ordonnée de la courbe sera encore positive quand celle de la droite sera annulée. Il est clair qu'on y parviendra en donnant à m une valeur inférieure à toutes celles que peut avoir F (x) dans l'intervalle indiqué. Ainsi tout se réduit à prendre le minimum de F (x), c'est-à-dire celui de $f'(x)$ depuis $x = a$ jusqu'à $x = \alpha$, ou plutôt depuis a jusqu'à A, intervalle qui comprend le premier. Comme nous avons vu que $f'(x)$ devenait négatif quelque part entre a et α, on conçoit que ce minimum sera un maximum numérique des valeurs négatives de $f'(x)$.

Voici maintenant ce qu'il y a de simple et d'ingénieux à la fois dans la manière dont M. Cauchy détermine cette quantité m. Il met à part les termes positifs et les termes négatifs de $f(x)$ et pose

$$f(x) = \lambda(x) - \mu(x),$$

ce qui donnera aussi

$$f'(x) = \lambda'(x) - \mu'(x),$$

de sorte que $f'(x)$ sera décomposé de la même manière en un groupe positif et un groupe négatif. Or, x croissant constamment depuis a jusqu'à A, il est évident que l'on aura le minimum de $f'(x)$ en remplaçant x par a dans $\lambda'(x)$ et par A dans $\mu'(x)$; donc enfin

$$m = \lambda'(a) - \mu'(\text{A}).$$

m ainsi déterminé donne naturellement $y_1 < y$. Donc, si l'ordonnée $y_1 = 0$, la valeur correspondante de l'abscisse x sera comprise entre a et la racine α, et sera une valeur plus rapprochée de α; cette valeur de x, pour laquelle

$$f(a) + m(x - a) = 0,$$

donnera

$$x - a = -\frac{f(a)}{m}$$

et

$$x = a - \frac{f(a)}{m}.$$

On voit maintenant comment on pourra approcher indéfiniment de α. Soit

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{m}$$

cette première valeur de x; nous aurons ensuite

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{m_1},$$

en posant

$$m_1 = \lambda'(a_1) - \mu'(\mathrm{A}).$$

On aura de même

$$a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)}{m_2},$$

et ainsi de suite. On trouvera d'une manière analogue la plus grande des racines comprises entre a et A, en revenant de A à a.

6. Cette méthode présente le cachet de rigueur et de généralité qui caractérise les travaux de M. Cauchy, mais elle est moins avantageuse que celle de Newton, quand celle-ci est applicable. En effet, au lieu de prendre

$$x = a - \frac{f(a)}{\lambda'(a) - \mu'(\mathrm{A})},$$

Newton pose

$$x = a - \frac{f(a)}{\lambda'(a) - \mu'(a)},$$

puisque

$$f'(a) = \lambda'(a) - \mu'(a).$$

Or, de ces deux quantités, m et $f'(a)$, toutes deux né-

gatives, du moins quand la correction de Newton est applicable, la plus grande numériquement est m, parce que la portion négative $\mu'(A)$ est plus grande que dans $f'(a)$. Donc, dans la méthode de Newton, le dénominateur de la correction étant plus petit, la correction sera plus considérable, et, par suite, plus avantageuse.

D'après cela, il est important de pouvoir reconnaître dans quelles circonstances la méthode de Newton est applicable. M. Cauchy est encore parvenu à résoudre ce problème, ainsi qu'on va le voir.

Si $f'(x)$ croît d'une manière continue de a jusqu'à A, les valeurs négatives de cette quantité décroissant numériquement, il est clair que $f'(a)$ sera le minimum cherché, c'est-à-dire le maximum des valeurs négatives que nous avons appelé m; on aura donc

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

C'est la correction de Newton.

Si, au contraire, $f'(x)$ va toujours en décroissant depuis a jusqu'à A, les valeurs négatives de cette quantité croissant numériquement, on pourra évidemment prendre $f'(A)$ pour valeur de m, ce qui donnera

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(A)}.$$

Cette correction a encore été indiquée par Newton, cependant on néglige de la faire connaître dans les ouvrages élémentaires, sans doute parce qu'elle n'a pas, comme la correction $-\frac{f(a)}{f'(a)}$, une signification géométrique relative à la tangente en un point de la courbe. Mais elle n'en est pas moins utile, et l'on doit remarquer qu'on trouve bien plus souvent qu'on ne le pense l'occasion d'employer la méthode de Newton, si l'on appelle ainsi l'en-

semble des deux corrections que nous venons d'examiner.

Pour reconnaître si $f'(x)$ varie d'une manière continue, observons quel sera le signe de

$$f''(x) = \lambda''(x) - \mu''(x),$$

qui est la dérivée de $f'(x)$. Si l'on fait tour à tour dans la somme des termes positifs $x = a$ et $x = \text{A}$, et dans la somme des termes négatifs $x = \text{A}$ et $x = a$, on obtiendra deux différences $\lambda''(a) - \mu''(\text{A})$ et $\lambda''(\text{A}) - \mu''(a)$, dont la première est évidemment inférieure, la seconde évidemment supérieure à toutes les valeurs de $f''(x)$ dans l'intervalle de $x = a$ à $x = \text{A}$. Donc si ces deux différences sont de même signe, il en sera de même, à plus forte raison, pour toutes les valeurs de $f''(x)$ comprises dans cet intervalle; ainsi le caractère cherché pour la continuité sera

$$\frac{\lambda''(a) - \mu''(\text{A})}{\lambda''(\text{A}) - \mu''(a)} > 0,$$

puisque les deux termes de cette fraction devront avoir le même signe.

Cette condition étant remplie, si les deux signes des termes de la dernière fraction sont positifs, $f'(x)$ croît toujours dans l'intervalle indiqué : donc la correction est $-\frac{f(a)}{f'(a)}$; si le deux signes sont négatifs, $f'(x)$ décroît constamment: donc la correction sera $-\frac{f(a)}{f'(\text{A})}$.

Nous allons voir ce qu'il faut faire quand les deux signes sont opposés.

7. Jusqu'à présent nous avons supposé que les corrections étaient toujours additives, ce qui ne permettait d'approcher de la racine que d'un seul côté. Nous allons

chercher maintenant à resserrer cette racine entre deux valeurs, l'une inférieure et toujours croissante, comme précédemment, l'autre supérieure et toujours décroissante. Seulement, il faut admettre pour cela que cette racine soit séparée, et nous avons vu que les recherches précédentes permettent d'y parvenir.

Nous supposerons donc que α est la seule racine comprise entre a et A; alors, puisque $f(a) > 0$, on a nécessairement $f(\mathrm{A}) < 0$.

On s'approchera toujours de a vers α en posant

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{m}$$

et

$$m = \lambda'(a) - \mu'(\mathrm{A}).$$

En modifiant légèrement les raisonnements qui ont conduit à cette correction, on trouvera pour approcher de A vers α, la valeur

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{A} - \frac{f(\mathrm{A})}{m}$$

que l'on peut d'ailleurs vérifier en remarquant que la correction $-\frac{f(\mathrm{A})}{m}$ est négative comme cela doit être puisque $f(\mathrm{A})$ et m sont tous deux négatifs; de plus

$$m = \lambda'(a) - \mu'(\mathrm{A})$$

étant maximum numérique des valeurs négatives de $f'(x)$, la correction ne peut être trop considérable.

Cette méthode réussit dans tous les cas possibles; mais pour que l'on soit forcé de l'appliquer, c'est-à-dire pour que la méthode de Newton ne puisse être employée, il faut que les limites $x = a$ et $x = \mathrm{A}$ de la racine α comprennent un changement dans la marche des valeurs de $f'(x)$ qui croîtrait après avoir décru ou réciproquement;

en d'autres termes, il faut que la courbe représentée par l'équation

$$y = f(x)$$

ait une inflexion dans cet intervalle. Dans cette circonstance même, on peut généralement ramener cette recherche au cas ordinaire en prenant pour l'une des limites de α la valeur de x qui correspond à $f''(x) = 0$ et qui donne par conséquent le point d'inflexion.

8. Voyons ce qu'il faut faire pour resserrer la racine en plus et en moins quand la méthode de Newton est applicable, puisque l'emploi en est plus avantageux quand il est légitime.

On reconnaîtra sans peine, d'après ce qui a été dit jusqu'à présent, que si $f'(x)$ croît toujours de a jusqu'à A, on doit prendre

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

et

$$A_1 = A - \frac{f(A)}{f'(a)}.$$

Si, au contraire, $f'(x)$ décroît toujours, il faut poser

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(A)}$$

et

$$A_1 = A - \frac{f(A)}{f'(A)} \; (*).$$

Enfin nous terminerons en rappelant que nous avons supposé la racine α positive, ainsi que ses limites a et A : de plus, nous avons aussi supposé $f(a) > 0$, et, par suite,

---

(*) Fourier indique cette méthode, mais il la soumet à des restrictions qui ne sont pas toutes nécessaires.

$f(A) < 0$. Si l'énoncé de la question ne rentrait pas dans ces suppositions, il serait facile de l'y ramener.

9. Il nous reste maintenant à donner quelques exemples.

Soit l'équation

$$x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$$

dont les racines sont comprises l'une entre 0 et -1, l'autre entre 0 et 1, et enfin la troisième entre 2 et 3. Cherchons la seconde racine pour laquelle $a = 0$, $A = 1$, ce qui donne

$$f(a) = 1 \quad \text{et} \quad f(A) = -1.$$

On trouve

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$$

et

$$f''(x) = 6x - 4;$$

donc $f''(x)$ prenant des valeurs différentes pour les limites qui comprennent la racine, on ne pourra pas compter sur la méthode de Newton, et il faut prendre avec M. Cauchy

$$m = \lambda'(a) - \mu'(A),$$

ce qui donne

$$m = -5, \quad a_1 = 0,2$$

et

$$A_1 = 0,8.$$

Ensuite

$$m_1 = \lambda'(a_1) - \mu'(A_1) = -4,08,$$

d'où l'on tire

$$a_2 = 0,38 \quad \text{et} \quad A_2 = 0,66;$$

on trouvera de même

$$a_3 = 0,5, \quad A_3 = 0,584.$$

Une fois arrivé à ce point, on pourra employer la méthode de Newton. En effet, le point d'inflexion de la courbe dont l'équation est

$$y = f(x)$$

étant donné par la valeur de x qui rend nulle la dérivée seconde $6x - 4$, c'est-à-dire par la valeur $x = 0,666$, on voit que la courbe ne subit pas d'inflexion depuis $x = 0,5$ jusqu'à $x = 0,584$. Comme $f''(x)$ est négatif pour ces deux valeurs, $f'(x)$ diminue dans cet intervalle; donc on devra poser

$$a_4 = a_3 - \frac{f(a_3)}{f'(A_3)}$$

et

$$A_4 = A_3 - \frac{f(A_3)}{f'(A_3)},$$

ce qui donnera

$$a_4 = 0,554 \quad \text{et} \quad A_4 = 0,555.$$

En continuant ainsi l'on trouve

$$x = 0,55496.$$

10. Considérons encore l'équation transcendante

$$x.2^x = 30 \text{ (*)}.$$

Il est clair qu'il n'y a pas de racines négatives, puisque le premier membre serait alors négatif; de plus, il n'y aura qu'une seule racine positive, car le premier membre croît indéfiniment à partir de $x = 0$.

(*) Cette équation est déjà résolue par Pacciolo. Tm.

Posons

$$f(x) = 30 - x.2^x;$$

on reconnaît que la racine est comprise entre $a = 3$ qui donne

$$f(a) = 6,$$

et $A = 4$ pour lequel

$$f(A) = -34.$$

Ensuite

$$f'(x) = -2^x(1 + xl2)$$

et

$$f''(x) = -2^x l2(2 + xl2),$$

en indiquant par $l2$ le logarithme népérien de 2, c'est-à-dire 0,69314718. On peut voir facilement que $f''(x)$ étant toujours négatif, $f'(x)$ décroît constamment; on a donc

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(A)}$$

et

$$A_1 = A - \frac{f(A)}{f'(A)},$$

car la méthode de Newton peut s'appliquer ici puisqu'il n'y a pas de changement de courbure dans l'intervalle de $x = 3$ à $x = 4$.

On a

$$f'(34) = -60,3614,$$

ce qui donne

$$a_1 = 3,1 \quad \text{et} \quad A_1 = 3,4.$$

On calculera facilement 2^x par logarithmes, et l'on parviendra bientôt à la valeur $x = 3,22$ qui est suffisamment approchée, car

$$f(3,22) = 0,00001.$$

EXERCICES D'ALGÈBRE

Extraits du Manuel des candidats à l'École Polytechnique

De M. CATALAN (*).

I. Étant donné le système

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_p &= a_1,\\
x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{p+1} &= a_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\
x_n + x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} &= a_n,
\end{aligned}$$

trouver dans quel cas il est *déterminé, indéterminé* ou *impossible*. Quand il est déterminé, quel est son *déterminant* et quelles sont les valeurs des inconnues?

II. Transformer l'expression $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{(a+b)}}$ en une autre dont le dénominateur soit rationnel.

III. En représentant par m un nombre plus grand que l'unité, on a

$$1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1.2}{(m+1)(m+2)} + \frac{1.2.3}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \ldots = \frac{m}{m-1}.$$

IV. De combien de manières peut-on former le nombre 251 par l'addition de douze nombres entiers, inférieurs à 50?

(*) *Sous presse*, chez M. Mallet-Bachelier.

V. Démontrer la double inégalité

$$\frac{1}{(p-1)(a-1)^{p-1}} > \frac{1}{a^p} + \frac{1}{(a+1)^p} + \frac{1}{(a+2)^p} + \ldots$$
$$> \frac{1}{(p-1)\,a^{p-1}}.$$

VI. Développer, en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de x, la fonction

$$\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \ldots$$

Quel sera le coefficient de x^n. La série sera-t-elle convergente $(1 > x > 0)$?

VII. Trouver la somme des produits trois à trois des n premiers nombres naturels.

VIII. Trouver la plus petite valeur entière de x vérifiant l'inégalité

$$(1,01)^x > 10x.$$

IX. Une personne emprunte pour un an, à *intérêt composé*, un *capital a*. Elle convient de se libérer au moyen de n payements égaux, effectués à des intervalles de temps égaux entre eux. Le premier payement sera fait $\frac{1}{n}$ d'année après le moment de l'emprunt. Le taux de l'intéret est de $\frac{z}{n}$ *pour franc pour* $\frac{1}{n}$ d'année. On demande

1°. La valeur b de chacun des payements;

2°. Vers quelle limite tend le rapport $\frac{nb}{a}$, lorsque n augmente indéfiniment;

3°. Comment varie cette limite lorsque r diminue;

4°. Quelle est la valeur de cette limite pour $r = 0$.

La suite prochainement.

SOLUTION DE LA QUESTION 315

(voir page 239);

PAR M. FÉLIX LUCAS,
Élève de l'École Polytechnique.

Soit un système de n forces appliquées au point A et représentées en grandeur et en direction par les longueurs AM_1, AM_2,..., AM_n, et soit AN la résultante.

E étant un point quelconque de l'espace, on forme l'expression

$$\overline{M_1E}^2 + \overline{M_2E}^2 + \ldots + \overline{M_nE}^2 - \overline{AE}^2.$$

Trouver la position du point E qui rend cette expression minima.

Je prends trois axes rectangulaires passant par A ; j'appelle

$$\alpha_p,\ \beta_p,\ \gamma_p$$

les coordonnées du point M_p,

$$a,\ b,\ c$$

celles du point N.

On a alors

$$a = \sum \alpha_p, \quad b = \sum \beta_p, \quad c = \sum \gamma_p.$$

Si x, y, z désignent les coordonnées du point E, l'expression proposée est

$$\sum [(x - \alpha_p)^2 + (y - \beta_p)^2 + (z - \gamma_p)^2] - (x^2 + y^2 + z^2),$$

ou bien

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} (n-1)(x^2+y^2+z^2)-2(ax+by+cz) \\ \qquad\qquad\qquad +\sum(\alpha_p^2+\beta_p^2+\gamma_p^2). \end{array} \right.$$

Si je fais mouvoir le point E dans l'espace de manière que cette expression conserve une valeur constante k, ce point décrira une sphère (réelle ou imaginaire) dont le centre, qui ne dépend pas de la constante k, a pour coordonnées $\frac{a}{n-1}$, $\frac{b}{n-1}$, $\frac{c}{n-1}$.

On reconnaît aisément que la plus petite valeur que puisse prendre la fonction (1) pour des positions réelles de E est la valeur de k qui réduit à un point la sphère en question. Mais alors la position de E est complétement déterminée. C'est le centre fixe dont nous avons parlé.

Le point cherché n'est donc pas le point N (*), mais il s'obtient en prenant sur AN, à partir de A, la $(n-1)^{ième}$ partie de cette droite.

Note du Rédacteur. Une solution anonyme, fondée sur des raisonnements analogues à ceux de la solution précédente, nous a été adressée de Luxembourg, et une autre par M. Émile Fron, élève du collége Rollin (classe de M. Suchet).

NOTE SUR UN THÉORÈME ARITHMOLOGIQUE D'EULER

(voir t. XIV, p. 433);

PAR M. CHEVILLIER,
Professeur à Besançon.

Ce théorème doit s'énoncer ainsi :

m et b étant supposés premiers entre eux, si l'on peut

(*) On a mis $\overline{AE}^2$ au lieu de $(n-1)\,\overline{AE}^2$; faute typographique.

trouver un nombre entier x tel, que $mx - b$ divise

$$mc + ab,$$

la valeur correspondante de y est donnée par l'équation

$$my - a = \frac{mc + ab}{mx - b},$$

car on a

$$y = \frac{mc + ab + a(mx - b)}{m(mx - b)};$$

si m et b ne sont pas premiers entre eux, m et $mx - b$ ne seront pas non plus premiers entre eux et alors y peut avoir une valeur fractionnaire.

SUR LE CALCUL DE π AU MOYEN DES LOGARITHMES;

PAR M. IS. CHEVILLIET.

Si l'on calcule π par logarithmes au moyen des formules

$$P_1 = 2\sqrt{2},$$

$$P_2 = 2^2\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

$$P_3 = 2^3\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

qui donnent les périmètres des polygones réguliers de 4, 8, 16,..., côtés inscrits dans le cercle dont le diamètre est l'unité, l'approximation, au lieu d'aller toujours en augmentant, diminue bientôt, ainsi que M. Dupain l'a fait observer dans le dernier numéro des *Nouvelles Annales* (p. 85). Cela est facile à expliquer, car la quantité pré-

cédée du signe moins dont on ne connaît jamais que les sept premiers chiffres tendant vers 2, l'erreur relative de la différence croît très-rapidement.

Pour éviter cet inconvénient et obtenir π avec toute l'approximation que comportent les Tables, j'emploie depuis longtemps, au lieu de ces formules, les suivantes :

$$P_1 = 2\,\frac{2}{\sqrt{2}},$$

$$P_2 = 2\,\frac{2}{\sqrt{2}}\;\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$P_3 = 2\,\frac{2}{\sqrt{2}}\;\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\;\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

. . . .

$$\pi = 2\,\frac{2}{\sqrt{2}}\;\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\;\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots \text{ à l'infini},$$

qui s'en déduisent facilement et qui ont déjà été données dans les *Nouvelles Annales* par M. Catalan (t. I, p. 190), et aussi par Euler.

Le calcul de π au moyen de cette dernière expression est tout entier contenu dans le tableau suivant où, pour abréger, je désigne par D_1, D_2,..., D les dénominateurs des fractions successives et le produit de tous les dénominateurs employés.

$\log 2 = 0,3010300$	$\log D_1 = 0,1505150 = \log 1,414214$
$\log(2 + D_1) = 0,5332908$	$\log D_2 = 0,2666454 = \log 1,847759$
$\log(2 + D_2) = 0,5852079$	$\log D_3 = 0,2926039 = \log 1,961570$
$\log(2 + D_3) = 0,5978674$	$\log D_4 = 0,2989337 = \log 1,990370$
$\log(2 + D_4) = 0,6010131$	$\log D_5 = 0,3005066 = \log 1,997591$
$\log(2 + D_5) = 0,6017984$	$\log D_6 = 0,3008992 = \log 1,999397$
$\log(2 + D_6) = 0,6019946$	$\log D_7 = 0,3009973 = \log 1,999849$
$\log(2 + D_7) = 0,6020437$	$\log D_8 = 0,3010219 = \log 1,999963$
$\log(2 + D_8) = 0,6020559$	$\log D_9 = 0,3010279 = \log 1,999990$
$\log(2 + D_9) = 0,6020589$	$\log D_{10} = 0,3010274 = \log 1,999997$
$\log(2 + D_{10}) = 0,6020597$	$\log D_{11} = 0,3010298 = \log 1,999999$
	$\log D = 3,1152101$

$$12 \log 2 = 3,6123600$$
$$\log D = 3,1152101$$
$$\log \pi = 0,4971499 = \log 3,141593.$$

PROBLÈME.

Déterminer la surface du second degré qui passe par neuf points ;

PAR M. POUDRA.

Soient a, b, c, d, e, f, g, h, i les neuf points donnés.

Par la droite ab et par les six points c, d, e, f, g, h on fait passer un hyperboloïde (*Nouvelles Annales*, mai 1856, p. 161).

Par la droite gh et par les six points a, b, c, d, e, f on fait passer un autre hyperboloïde.

Ces deux hyperboloïdes se couperont suivant une courbe gauche du quatrième degré passant par les huit

points a, b, c, d, e, f, g, h, qui sera donc facile à construire par points (*voir* p. 162).

Si, par le neuvième point i, on mène un plan quelconque, il coupera la courbe du quatrième degré en quatre points qui, avec le point i, détermineront une conique.

Or la courbe du quatrième degré qui est l'intersection des deux hyperboloïdes appartient également à toutes les surfaces du deuxième degré passant par ces huit points; donc elle appartient à celle qui passe par les neuf points donnés. Donc la section conique ci-dessus déterminée par un plan passant par le neuvième point i est sur cette surface; on peut déterminer ainsi une infinité de sections coniques situées sur la surface cherchée.

On voit aussi qu'en prenant un autre point que le point i pour le neuvième, on aurait d'autres sections coniques situées sur la même surface.

La surface du deuxième degré est donc déterminée.

SUR LES SÉRIES QUI DONNENT LE NOMBRE DE RACINES RÉELLES des équations algébriques à une ou à plusieurs inconnues;

PAR M. FRANÇOIS BRIOSCHI,
Professeur à l'université de Pavie.

I.

Quelques propriétés des formes quadratiques (*).

1°. Soit

$$f = \sum_r \sum_s A_{r,s} u_r u_s \qquad (A_{r,s} = A_{s,r})$$

(*) Nous engageons le lecteur à ne prendre qu'une forme quadratique à trois variables u_1, u_2, u_3 et il verra que dans cet admirable Mémoire tout devient d'une facilité intuitive. TM.

une forme quadratique à n indéterminées $u_1, u_2, \ldots, u_n$; si on la transforme au moyen de la substitution linéaire

$$(1) \qquad u_r = a_{r,1} v_1 + a_{r,2} v_2 + \ldots + a_{r,n} v_n$$

en posant

$$(2) \qquad A_{1,s} a_{1,r} + A_{2,s} a_{2,r} + \ldots + A_{n,s} a_{n,r} = h_{s,r},$$

et en supposant

$$(3) \qquad \begin{cases} h_{1,r} a_{1,s} + h_{2,r} a_{2,s} + \ldots + h_{n,r} a_{n,s} = 0, \\ h_{1,r} a_{1,r} + h_{2,r} a_{2,r} + \ldots + h_{n,r} a_{n,r} = p_r, \end{cases}$$

on aura

$$(4) \qquad f = \sum_r p_r v_r^2 \cdot$$

où les rectangles ont disparu. La substitution linéaire

$$(5) \qquad u_r = c_{r,1} w_1 + c_{r,2} w_2 + \ldots + c_{r,n} w_n$$

transformera d'une manière semblable la forme f dans celle-ci

$$(6) \qquad f = \sum_r q_r w_r^2,$$

en faisant

$$A_{1,s} c_{1,r} + A_{2,s} c_{2,r} + \ldots + A_{n,s} c_{n,r} = k_{s,r},$$
$$k_{1,r} c_{1,s} + k_{2,r} c_{2,s} + \ldots + k_{n,r} c_{n,s} = 0,$$
$$k_{1,r} c_{1,r} + k_{2,r} c_{2,r} + \ldots + k_{n,r} c_{n,r} = q_r.$$

Si l'on indique par A et C les déterminants (*)

$$\sum (\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}), \quad \sum (\pm c_{1,1} c_{2,2} \ldots c_{n,n}),$$

et par $\alpha_{r,s}$, $\gamma_{r,s}$ les expressions $\frac{dA}{da_{r,s}}$, $\frac{dC}{dc_{r,s}}$; les équa-

(*) Il est à regretter, dans l'intérêt de l'enseignement public, que la traduction de l'ouvrage fondamental sur les déterminants de M. Brioschi tarde si longtemps à paraître. Il y a urgence. TM.

tions (1) donnent réciproquement v en u

$$\mathrm{A}v_r = \alpha_{1,r}u_1 + \alpha_{2,r}u_2 + \ldots + \alpha_{n,r}u_n,$$

et en substituant pour u_1, u_2,..., u_n les valeurs (5), on aura

$$(7) \qquad \mathrm{A}v_r = \lambda_{r,1}w_1 + \lambda_{r,2}w_2 + \ldots + \lambda_{r,n}w_n,$$

où

$$\lambda_{s,r} = \alpha_{1,s}c_{1,r} + \alpha_{2,s}c_{2,r} + \ldots + \alpha_{n,s}c_{n,r}.$$

Si, au moyen de la substitution linéaire (7), on transforme l'équation (4), la comparaison de ce résultat avec la forme (6) donne les équations

$$(8) \qquad \begin{cases} p_1\lambda^2_{1,r} + p_2\lambda^2_{2,r} + \ldots + p_n\lambda^2_{n,r} = q_r\mathrm{A}^2, \\ p_1\lambda_{1,r}\lambda_{1,s} + p_2\lambda_{2,r}\lambda_{2,s} + \ldots + p_n\lambda_{n,r}\lambda_{n,s} = 0. \end{cases}$$

De même, en posant

$$\mu_{r,s} = \gamma_{1,2}a_{1,s} + \gamma_{r,r}a_{2,s} + \ldots + \gamma_{n,r}a_{n,s},$$

on obtient les équations

$$(9) \qquad \begin{cases} q_1\mu^2_{1,r} + q_2\mu^2_{2,r} + \ldots + q_n\mu^2_{n,r} = p_r\mathrm{C}^2, \\ q_1\mu_{1,r}\mu_{1,s} + q_2\mu_{2,r}\mu_{2,s} + \ldots + q_n\mu_{n,r}\mu_{n,s} = 0. \end{cases}$$

2°. Soient α_1, α_2,..., α_r, r indéterminées ; je désigne par L le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \lambda_{1,1} & \lambda_{2,1} \ldots & \lambda_{r-1,1} \\ \alpha_2 & \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2} \ldots & \lambda_{r-1,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_r & \lambda_{1,r} & \lambda_{2,r} \ldots & \lambda_{r-1,r} \end{vmatrix}$$

et par L_s l'expression

$$\lambda_{s,1}\frac{d\mathrm{L}}{d\alpha_1} + \lambda_{s,2}\frac{d\mathrm{L}}{d\alpha_2} + \ldots + \lambda_{s,r}\frac{d\mathrm{L}}{d\alpha_r}.$$

Si, dans les équations (8), on fait

$$r = 1, \quad s = 2,\ 3, \ldots, r$$

on obtient r équations, lesquelles multipliées respectivement par

$$\frac{dL}{d\alpha_1}, \quad \frac{dL}{d\alpha_2}, \ldots, \quad \frac{dL}{d\alpha_r}.$$

donnent

$$p_r \lambda_{r,1} L_r + p_{r+1} \lambda_{r+1,1} L_{r+1} + \ldots + p_n \lambda_{n,1} L_n = q_1 \frac{dL}{d\alpha_1} A^2.$$

Des mêmes équations (8) on déduira d'une manière analogue les suivantes :

$$p_r \lambda_{r,2} L_r + p_{r+1} \lambda_{r+1,2} L_{r+1} + \ldots + p_n \lambda_{n,2} L_n = q_2 \frac{dL}{d\alpha_2} A^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_r \lambda_{r,r} L_r + p_{r+1} \lambda_{r+1,r} L_{r+1} + \ldots + p_n \lambda_{n,r} L_n = q_r \frac{dL}{d\alpha_r} A^2,$$

et en ajoutant ces équations multipliées respectivement par

$$\frac{dL}{d\alpha_1}, \quad \frac{dL}{d\alpha_2}, \ldots, \quad \frac{dL}{d\alpha_r},$$

on a

$$(10) \left\{ \begin{aligned} & p_r L_r^2 + p_{r+1} L_{r+1}^2 + \ldots + p_n L_n^2 \\ & = A^2 \left\{ q_1 \left(\frac{dL}{d\alpha_1}\right)^2 + q_2 \left(\frac{dL}{d\alpha_2}\right)^2 + \ldots + q_r \left(\frac{dL}{d\alpha_r}\right)^2 \right\}. \end{aligned} \right.$$

En désignant par M le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \mu_{1,1} & \mu_{2,1} \ldots & \mu_{r-2,1} \\ \alpha_2 & \mu_{1,2} & \mu_{2,2} \ldots & \mu_{r-2,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r-1} & \mu_{1,r-1} & \mu_{2,r-1} \ldots & \mu_{r-2,r-1} \end{vmatrix}$$

et par M_s l'expression

$$\mu_{s,1}\frac{dM}{d\alpha_1}+\mu_{s,2}\frac{dM}{d\alpha^2}+\ldots+\mu_{s,r-1}\frac{dM}{d\alpha_{r-1}},$$

on déduit d'une manière analogue des équations (9) l'équation

$$(11)\left\{\begin{aligned}&q_{r-1}M_{r-1}^2+q_rM_r^2+\ldots+q_nM_n^2\\&=C^2\left\{p_1\left(\frac{dM}{d\alpha_1}\right)^2+p_2\left(\frac{dM}{d\alpha_2}\right)^2+\ldots+p_{r-1}\left(\frac{dM}{d\alpha_{r-1}}\right)^2\right\}.\end{aligned}\right.$$

3°. Supposons que les coefficients $a_{r,s}$, $c_{r,s}$ et les α soient des quantités réelles, la même propriété aura lieu pour L_s, M_s, $\frac{dL}{d\alpha_s}$, $\frac{dM}{d\alpha_s}$; par conséquent les signes des termes des équations (10), (11) ne dépendront que des signes des coefficients p_1, p_2,..., q_1, q_2,.... Je suppose p_1, p_2,..., p_{r-1} tous négatifs, et les autres coefficients p_r, p_{r+1},..., p_n tous positifs. L'équation (10) montre que les r coefficients q_1, q_2,..., q_r ne peuvent pas être tous négatifs; et parce que ces coefficients sont r quelconques entre les n coefficients q_1, q_2,..., q_n, on en déduit que de ces mêmes coefficients il ne peut en être de négatifs un nombre plus grand que $r-1$. Or l'équation (11) montre que les coefficients q_{r-1}, q_r,..., q_n ne doivent pas être tous positifs, puisque p_1, p_2,..., p_{r-1} sont négatifs; mais ces coefficients sont $n-r+2$ quelconques entre les n quantités q_1, q_2,..., q_n; donc le nombre des positifs entre ces coefficients ne doit pas être plus grand que $n-r+1$; ou bien le nombre des négatifs ne devra être plus petit que $r-1$. Ainsi le nombre des quantités négatives parmi q_1, q_2,..., q_n ne peut être ni supérieur ni inférieur à $r-1$, donc il est égal à $r-1$; c'est-à-dire égal au nombre des négatifs entre les n coefficients p_1, p_2,..., p_n. En conséquence on a le théorème suivant :

THÉORÈME I. *Si l'on transforme une forme quadratique au moyen d'une substitution linéaire à coefficients réels, dans une autre qui contienne les seuls carrés des variables, le nombre des termes positifs et négatifs de la transformée sera constant, quelle que soit la substitution employée.*

Cette importante propriété des formes quadratiques a été énoncée par M. Sylvester sous la dénomination de *loi d'inertie* des formes quadratiques. La démonstration ci-dessus en fait voir toute la généralité (*).

4°. On sait, ou l'on peut démontrer facilement, que, posant

$$m_{r,s} = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} \ldots & A_{r,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} \ldots & A_{r,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1,r-1} & A_{2,r-1} \ldots & A_{r,r-1} \\ A_{1,s} & A_{2,s} & A_{r,s} \end{vmatrix}$$

et

$$m_{r,r} = \Delta_r, \quad \Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = A_{1,1}, \quad \Delta_2 = A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}^2 \ldots,$$

$$m_{r,s} = \frac{d.\Delta_r}{d.A_{r,s}},$$

on transforme la forme quadratique f dans celle-ci

$$f = \sum_r \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}} v_r^2,$$

au moyen de la substitution linéaire

$$\begin{aligned} m_{1,1}v_1 &= m_{1,1}u_1 + m_{1,2}u_2 + \ldots + m_{1,n}u_n, \\ m_{2,2}v_2 &= \phantom{m_{1,1}u_1 +{}} m_{2,2}u_2 + \ldots + m_{2,n}u_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_{n,n}v_n &= \phantom{m_{1,1}u_1 + m_{2,2}u_2 + \ldots +{}} m_{n,n}u_n, \end{aligned}$$

et les u étant exprimés en fonction de v.

(*) Ainsi, en faisant disparaître les rectangles dans une équation d'une conique ou d'une surface du second degré, les nombres des termes positifs et négatifs restent constants, quelle que soit la transformation linéaire.

TM.

Supposons maintenant que les coefficients $A_{r,s}$ de la forme f soient réels; alors on déduira comme corollaire du théorème I que le nombre des termes positifs et négatifs dans une transformée quelconque de la forme f (laquelle contienne les seuls carrés des variables, et soit obtenue au moyen d'une substitution linéaire à coefficients réels) est égal au nombre des termes positifs et négatifs dans la série :

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

c'est-à-dire au nombre des permanences et des variations de signe dans la série

$$(12) \qquad \Delta_0, \ \Delta_1, \ \Delta_2, \ldots, \ \Delta_n;$$

or

$$\Delta_0 = 1.$$

Ainsi l'on a ce théorème :

THÉORÈME II. *Le nombre des permanences et des variations de signes dans la suite* (12) *est égal au nombre des termes positifs et négatifs dans une transformée quelconque de la forme* f *obtenue dans les conditions du théorème I.*

5°. Une autre transformation remarquable de la forme quadratique f est celle qu'on obtient au moyen d'une substitution orthogonale, c'est-à-dire d'une substitution linéaire

$$u_r = a_{r,1} v_1 + a_{r,2} v_2 + \ldots + a_{r,n} v_n,$$

où les coefficients doivent vérifier les équations

$$a_{r,1}^2 + a_{r,2}^2 + \ldots + a_{r,n}^2 = 1,$$

$$a_{r,1} a_{s,1} + a_{r,2} a_{s,2} + \ldots + a_{r,n} a_{s,n} = 0.$$

De ces équations on déduit

$$A = 1, \quad a_{s,r} = \alpha_{s,r} \text{ (\textit{voir} p. 265)};$$

mais les équations (3) nous donnent en général

$$A h_{s,r} = p_r \alpha_{s,r},$$

par conséquent, dans ce cas particulier, l'équation (2) donnera

$$A_{1,s} a_{1,r} + \ldots + (A_{s,s} - p_r) a_{s,r} + \ldots + A_{n,s} a_{n,r} = 0.$$

Les coefficients p_1, p_2, etc., de la transformée

$$f = \sum_r p_r v_r^2$$

seront donc, comme il est connu, les racines du $n^{\text{ième}}$ degré

$$(13) \quad \begin{vmatrix} A_{1,1} - \theta & A_{2,1} \ldots & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} - \theta \ldots & A_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1,n} & A_{2,n} \ldots & A_{n,n} - \theta \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\theta^n - A_1 \theta^{n-1} + A_2 \theta^{n-2} - \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} A_{n-1} \theta + (-1)^n A_n = 0;$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des fonctions de $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, etc.

Or les racines de ces équations sont toutes réelles (propriété démontrée par MM. Cauchy, Jacobi, Borchardt, Sylvester, etc.; en conséquence le nombre des coefficients positifs dans la transformée ci-dessus sera égal au nombre des permanences de signes dans la suite

$$(14) \qquad 1, \; A_1, \; A_2, \ldots, \; A_n,$$

et le nombre des coefficients négatifs sera égal au nombre des variations de signes dans la même suite.

Les deux séries (12), (14) donneront donc pour le

théorème I un même nombre de permanences et de variations de signes.

II.

Des équations algébriques à une seule inconnue.

1°. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines d'une équation

$$\varphi(x) = 0,$$

$\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$, n fonctions rationnelles entières de x; $\omega(x)$, $\theta(x)$ deux polynômes qui ont même signe pour toutes les racines réelles de l'équation et a un nombre entier impair positif ou négatif.

Je démontrerai en premier lieu que la forme quadratique en u

$$f = \sum_m (x - x_m)^a \frac{\omega(x_m)}{\theta(x_m)}$$

$$\left\{ u_1 \psi_1(x_m) + u_2 \psi_2(x_m) + \ldots + u_n \psi_n(x_m) \right\}^2,$$

ou en posant

$$\sum_m (x - x_m)^a \frac{\omega(x_m)}{\theta(x_m)} \psi_r(x_m) \psi_s(x_m) = \mathrm{A}_{r\,s},$$

la forme quadratique

$$f = \sum_r \sum_s \mathrm{A}_{r,s} u_r u_s$$

est à coefficients réels. En effet, supposons que les racines x_1, x_2 soient imaginaires conjuguées. En posant

$$(x - x_1)^a \omega(x_1) \psi_r(x_1) \psi_s(x_1) = \alpha + i\beta,$$

$$\theta(x_1) = l + im,$$

on aura

$$(x - x_2)^a \omega(x_2) \psi_r(x_2) \psi_s(x_2) = \alpha - i\beta,$$

$$\theta(x_2) = l - im, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

et

$$A_{r,s} = \frac{2}{l^2 + m^2}(l\alpha + m\beta)$$

$$+ \sum_{3}^{n}{}_m (x - x_m)^a \frac{\omega(x_m)}{\theta(x_m)} \psi_r(x_m)\psi_s(x_m);$$

par conséquent, les coefficients de la forme f seront réels pour toutes les valeurs des racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et on pourra donc appliquer à cette forme le théorème II.

2°. Cela posé, j'observe que, en supposant les racines x_1, x_2 imaginaires conjuguées et en posant

$$(x - x_1)^a \omega(x_1) = \lambda + i\mu, \quad \theta(x_1) = l + im,$$
$$u_1\psi_1(x_1) + u_2\psi_2(x_1) + \ldots + u_n\psi_n(x_1) = P + iQ,$$

on aura

$$(x - x_2)^a \omega(x^2) = \lambda - i\mu, \quad \theta(x_2) = l - im,$$
$$u_1\psi_1(x_2) + u_2\psi_2(x_2) + \ldots + u_n\psi_n(x_2) = P - iQ,$$

P, Q étant les fonctions linéaires de $u_1, u_2, \ldots, u_n$. En substituant ces valeurs dans f, on obtient

$$f = \frac{2}{\alpha(l^2 + m^2)} \left\{ (\alpha P + \beta Q)^7 - (\alpha^2 + \beta^2) Q^2 \right\}$$

$$+ \sum_{3}^{n}{}_m (x - x_m)^a \frac{\omega(x_m)}{\theta(x_m)} \left\{ u_1\psi_1(x_m) + \ldots + u_n\psi_n(x_m) \right\}^2,$$

où

$$l\lambda + m\mu = \alpha, \quad m\lambda - l\mu = \beta;$$

et en général supposant que $x_1, x_{r+1}; x_2, x_{r+2}; \ldots, x_r, x_{2r}$ soient r couples de racines imaginaires et que

$$x_{2r+1} \ldots x_n$$

soient réelles, on pourra mettre f sous la forme

$$f = 2\sum_{1}^{r} {}_s \frac{1}{\alpha_s(l_s^2 + m_s^2)} \left\{ (\alpha_s P_s + \beta_s Q_s)^2 - (\alpha_s^2 + \beta_s^2) Q_s^2 \right\}$$

$$+ \sum_{2r+1}^{n} {}_m (x - x_m)^a \frac{\omega(x_m)}{\theta(x_m)} \left\{ u_1 \psi_1(x_m) + \ldots + u_n \psi_n(x_m) \right\}^2.$$

En transformant cette forme quadratique au moyen de la substitution linéaire à coefficients réels

$$v_s = \alpha_s P_s + \beta_s Q_s, \quad v_{2s} = Q_s,$$

$$v_m = u_1 \psi_1(x_m) + u_2 \psi_2(x_m) + \ldots + u_n \psi_n(x_m),$$

$(s = 1, 2, \ldots, r,\ m = 2r + 1, \ldots, n)$; on obtient

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} f = 2\sum_{1}^{r} {}_s \dfrac{1}{\alpha_s(l_s^2 + m_s^2)} \left\{ v_s^2 - (\alpha_s^2 + \beta_s^2) v_{2s}^2 \right) \\ + \sum_{2r+1}^{n} {}_m (x - x_m)^a \dfrac{\omega(x_m)}{\theta(x_m)} v_m^2, \end{array} \right.$$

et le nombre des termes positifs et négatifs dans cette transformée sera par les deux théorèmes de la première partie égal au nombre des permanences et des variations de signe dans la suite (12), et réciproquement. Cela aura lieu pour une valeur quelconque réelle de la variable x. Les Δ sont des fonctions de $A_{r,s}$, et, par conséquent, maintenant des fonctions de x.

Or pour une valeur réelle déterminée h de x, le nombre des termes positifs de la transformée (15) est évidemment égal à r (nombre des couples des racines imaginai-

res) plus le nombre des racines réelles $x_{2r+1}, \ldots, x_n$ qui ont des valeurs inférieures à h; et le nombre des termes négatifs dans la même transformée est évidemment égal à r, plus le nombre des racines réelles qui ont des valeurs plus grandes que h. De cette manière on est conduit au théorème suivant :

THÉORÈME III. *Pour une valeur réelle* h *de* x, *le nombre des permanences de signes dans la suite*

$$1, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n,$$

représente le nombre des couples de racines imaginaires de l'équation

$$\varphi(x) = 0,$$

augmenté du nombre des racines réelles moindres que h. *Le nombre des variations représente le nombre des couples de racines imaginaires, plus le nombre des racines réelles supérieures à* h.

Dans ce théorème sont compris deux théorèmes analogues de M. Sylvester et de M. Hermite.

Corollaire I. Si dans la suite (12) ci-dessus on pose successivement

$$x = h, \quad x = k, \quad (h > k),$$

la différence entre les nombres des variations correspondantes sera égale au nombre des racines réelles de l'équation

$$\varphi(x) = 0,$$

comprises entre k et h.

Corollaire II. L'équation

$$\varphi(x) = 0$$

a autant de couples de racines imaginaires qu'il y a de variations de signes dans la série des coefficients des plus hautes puissances de la variable dans la suite supérieure.

En se rappelant ce qu'on a démontré dans la première

partie, n° 5, on voit facilement que les propriétes établies dans le théorème précédent et dans ses corollaires ont lieu aussi pour la suite

$$1, A_1, A_2, \ldots, A_n,$$

qui est une suite de fonctions de x. (*Comptes rendus*, 25 juin 1855, *Sur le dénombrement des racines, etc.*, par M. Cauchy.)

On voit donc qu'il existe une infinité de fonctions possédant les propriétés de celles de M. Sturm et qu'il y a des moyens assez simples pour les obtenir.

3°. Nous croyons utile d'ajouter quelques applications.

a. Supposons

$$\psi_r(x) = x^{r-1}, \quad \theta(x) = \varphi'(x), \quad a = +1,$$

on a

$$A_{r,s} = \sum_m (x - x_m) \frac{\omega(x_m)}{\varphi'(x_m)} x_m^{r+s-2},$$

ou en posant

$$S_i = \sum_m \frac{x_m^i \omega(x_m)}{\varphi'(x_m)},$$

on obtient

$$A_{r,s} = S_{r+s-2}x - S_{r+s-1}$$

et

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} S_0 x - S_1 & S_1 x - S_2 \ldots & S_{r-1} x - S_r \\ S_1 x - S_2 & S_2 x - S_3 \ldots & S_r x - S_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{r+1} x - S_r & S_r x - S_{r+1} \ldots & S_{2r-2} x - S_{2r-1} \end{vmatrix}$$

ou, par une transformation connue,

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \ldots & S_r \\ S_1 & S_2 \ldots & S_{r-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{r-1} & S_r \ldots & S_{2r-1} \\ 1 & x & x^r \end{vmatrix}$$

Ces fonctions Δ_r sont, à un facteur constant près, les dénominateurs des réduites qu'on obtient en développant en fraction continue la fraction $\frac{\omega(x)}{\varphi(x)}$, en supposant $\omega(x)$ de degré inférieur à n. J'ai démontré directement cette propriété dans une Note : *Intorno ad alcuni punti d'algebra superiore*, publiée dans les *Annales* de M. Tortolini, août 1854; ce que d'ailleurs on peut vérifier assez facilement *à posteriori*.

Si l'on suppose $a = -1$ et

$$I_i = \sum_m \frac{x_m^i \omega(x_m)}{(x - x_m)\varphi'(x_m)},$$

on a

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} I_0 & I_1 \ldots & I_{r-1} \\ I_1 & I_2 \ldots & I_r \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ I_{r-1} & I_r \ldots & I_{2r-2} \end{vmatrix}$$

et ces fonctions Δ_r sont, à un facteur constant près, les rapports entre les résidus obtenus en divisant $\varphi(x)$ par $\omega(x)$ (en changeant les signes selon la méthode de M. Sturm) et la fonction $\varphi(x)$. J'ai démontré cela dans la Note citée tout à l'heure, et j'ai fait voir de quelle manière on peut former ces dénominateurs et ces résidus en fonction des coefficients des polynômes $\varphi(x)$, $\omega(x)$.

Il faut observer que le théorème III est applicable aux deux suites des dénominateurs des réduites et des résidus, en supposant $\omega(x)$, $\varphi'(x)$ du même signe pour des valeurs réelles de la variable, propriété établie par M. Sturm (*Mémoires présentés*, tome VI, 1835, § 26).

Si l'on suppose

$$\omega(x) = \varphi'(x),$$

on obtient les résultats de MM. Sylvester, Cayley, Bor-

chardt (*Nouvelles Annales*, 1854, tome XIII, page 71).
Dans ce cas on a

$$\Delta_n = \varphi(x).$$

b. On peut aussi obtenir tout de suite les expressions Δ_r par une disposition convenable des fonctions $\psi_r(x)$. Je me bornerai au cas de

$$\omega(x) = \theta(x) \quad \text{et} \quad a = 1.$$

En posant

$$\varphi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

et

$$\psi_r(x) = a_0 x^{r-1} + a_1 x^{r-2} + \ldots + a_{r-1},$$

$$A_{r,s} = B_{r,s}\, x - C_{r,s},$$

au moyen des relations connues entre les sommes des puissances des racines et les coefficients d'une équation, on obtient facilement

$$B_{r,s} = (n - s + 1)\, a_{r-1}\, a_{s-1}$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} \quad (s - r + 2)\, a_s\, a_{r-2} + (s - r + 4)\, a_{s+1}\, a_{r-3} + \ldots \\ + (s + r - 4)\, a_{s+r-3}\, a_1 + (s + r - 2)\, a_{s+r-2}\, a_0 \end{array} \right\}$$

$$- C_{r,s} = (s - r + 1)\, a_{r-1}\, a_s + (s - r + 3)\, b_{r-2}\, a_{s+1} + \ldots$$

$$+ (s + r - 1)\, a_0\, a_{s+r-1},$$

et l'on aura

$$\Delta_r = \left| \begin{array}{llll} B_{1,1}\, x - C_{1,1} & B_{1,1}\, x - C_{2,1} & \ldots & B_{r,1}\, x - C_{r,1} \\ B_{1,2}\, x - C_{1,2} & B_{2,2}\, x - C_{2,2} & \ldots & B_{r,2}\, x - C_{r,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{r,r}\, x - C_{1,r} & B_{2,r}\, x - C_{2,r} & \ldots & B_{r,r}\, x - C_{r,r} \end{array} \right|$$

c. En supposant

$$\theta(x) = 1,$$

par conséquent $\omega(x)$ une fonction dont la valeur est po-

sitive pour toute valeur réelle de la variable

$$a = 1, \quad \psi_r(x) = x^{r-1}$$

et

$$S_i = \sum_m x_m^i \, \omega(x_m),$$

on a

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \ldots & S_r \\ S_1 & S_2 \ldots & S_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{r-1} & S_r \ldots & S_{2r-1} \\ 1 & x \ldots & x^r \end{vmatrix}$$

résultat obtenu récemment par M. Joachimsthal (*Uber den Sturm'schen Satz*, *Journal* de Crelle, tome XLVIII, page 402).

III.

Des équations algébriques à deux inconnues.

1°. Soient

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \lambda(x, y) = 0$$

deux équations algébriques des degrés u, ν, et x_1, y_1, x_2, y_2,..., x_n, y_n les $n = u\nu$ systèmes de racines simultanées des mêmes équations. En indiquant par $\omega(x, y)$, $\theta(x, y)$ deux polynômes qui ont la propriété d'être de même signe pour toutes les valeurs réelles des variables; par $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$,..., $\psi_n(x, y)$, n fonctions rationnelles entières; et par a, c deux nombres impairs positifs ou négatifs; la forme quadratique

$$f = \sum_r \sum_s A_{r,s} u_r u_s,$$

dans laquelle

$$A_{r,s} = \sum_{1}^{n}{}_m (x - x_m)^a (y - y_m)^c \frac{\omega(x_m, y_m)}{\theta(x_m, y_m)} \times \psi_r(x_m, y_m) \psi_s(x_m, y_m),$$

est à coefficients réels ; ce qu'on démontre comme ci-dessus.

En opérant comme dans la IIe partie, on trouvera que, en supposant que x_1, y_1, x_{r+1}, y_{r+1}, x_2, y_2, x_{r+2}, $y_{r+2}, \ldots, x_r, y_r$, x_{2r}, y_{2r} soient r couples de solutions simultanées imaginaires et que les autres solutions soient réelles, on peut mettre f sous la forme

$$f = 2 \sum_{1}^{r}{}_s \frac{1}{\alpha_s(l_s^2 + m_s^2)} \left\{ (\alpha_s P_s + \beta_s Q_s)^2 - (\alpha_s^2 + \beta_s^2) Q_s^2 \right\}$$

$$+ \sum_{2r+1}^{n}{}_m (x - x_m)^a (y - y_m)^c \frac{\omega(x_m, y_m)}{\theta(x_m, y_m)} \times \left\{ u_1 \psi_1(x_m, y_m) + \ldots + u_n \psi_n(x_m, y_m) \right\}^2,$$

P_s, Q_s étant les fonctions linéaires de u_1, u_2, etc., à coefficients réels. On pourra donc au moyen d'une substitution linéaire à coefficients réels transformer cette forme f dans la suivante :

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} f &= 2 \sum_{1}^{r}{}_s \frac{1}{\alpha_s(l_s^2 + m_s^2)} \left\{ v_s^2 - (\alpha_s^2 + \beta_s^2) v_{2s}^2 \right\} \\ &+ \sum_{2r+1}^{n}{}_m (x - x_m)^a (y - y_m)^c \frac{\omega(x_m, y_m)}{\theta(x_m, y_m)} v_m^2. \end{aligned} \right.$$

Or pour un système déterminé de valeurs réelles h, k de x et de y le nombre des termes positifs dans cette transformée est égal à r (nombre de couples des solutions simultanées imaginaires), plus le nombre des solutions simultanées réelles x_{2r+1}, $y_{2r+1}, \ldots, x_n$, y_n, pour lesquelles le produit $(h - x_m)(k - y_m)$ est positif; et le nombre des termes négatifs est égal à r augmenté du nombre des solutions simultanées réelles pour lesquelles $(h - x_m)(k - y_m)$ est négatif. Par conséquent, on a le théorème :

THÉORÈME IV. *Pour un système de valeurs réelles* h *et* k *de* x *et de* y *le nombre des permanences de signes dans la suite*

$$1, \; \Delta_1, \; \Delta_2, \ldots, \; \Delta_n$$

représente le nombre des couples de solutions simultanées imaginaires des équations

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \lambda(x, y) = 0$$

augmenté du nombre des solutions réelles lesquelles sont à la fois plus grandes ou moindres que h, k, *et le nombre des variations de signes représente le nombre des couples de solutions simultanées imaginaires, plus le nombre des solutions réelles lesquelles ont la propriété d'être l'une plus grande, l'autre plus petite, ou réciproquement, que* h, k.

Il faut toujours se rappeler que les Δ sont des fonctions de $A_{r,s}$ fonction de x, y.

Corollaire. Si dans la suite supérieure on pose

$$x = h, \quad y = k,$$

$$x = h_1, \quad y = k_1,$$

$$(h_1 > h, \quad k_1 > k),$$

et si l'on indique par (h, k) le nombre des permanences

que présente la suite, même dans la première hypothèse, on aura le nombre

$$p = \frac{1}{2} \left\{ (h, k) + (h_1, k_1) - (h, k_1) - (h_1, k) \right\}$$

égal au nombre des solutions simultanées réelles des équations données, qui sont à la fois plus grandes que h, k et moindres que h_1, k_1. En effet, en posant dans la transformée (16) h, k au lieu de x, y, on a

$$(h, k) = r + n - 2r;$$

analoguement

$$(h_1, k_1) = n - r, \quad (h, k_1) = r, \quad (h_1, k) = r$$

et, par conséquent,

$$p = n - 2r,$$

nombre des solutions simultanées supposées réelles.

On a donc aussi dans le cas des deux équations algébriques une infinité de fonctions qui ont la propriété de celles de M. Sturm. Admirable découverte due à M. Hermite (*).

2°. *Applications*. En supposant

$$\alpha = 1, \quad c = 1,$$
$$\theta(x, y) = \varphi'(x)\lambda'(y) - \varphi'(y)\lambda'(x),$$
$$\psi_r(x, y) = x^{a-r+1} y^{r-1},$$

et

$$S_{i,j} = \sum_m \frac{x_m^{j-i} y_m^{i} \omega(x_m, y_m)}{\theta(x_m, y_m)},$$

(*) *Comptes rendus*, t. XXXV, p. 52, 1852; t. XXXVI, p. 294, 1853. M. Hermite a publié récemment des théorèmes de *déterminants* sous forme d'appendice à un opuscule intitulé, je crois, *Questionnaire*, rédigé par MM. Gerono et Roguet. Puisse cette voie procurer une entrée dans l'enseignement à cette théorie désormais indispensable. TM.

on a

$$A_{r,s} = xy S_{\beta-2,2\alpha} - y S_{\beta-2,2\alpha+1} - x S_{\beta-1,2\alpha+1} + S_{\beta-1,2\alpha+2},$$

étant $\beta = r + s$. Les expressions $S_{i,j}$ pourront être déterminées en fonction des coefficients des équations données par la méthode indiquée par M. Jacobi dans son Mémoire *Theoremata nova algebraica, etc.* (*Journal* de Crelle, tome XIV).

Si l'on suppose

$$\omega(x, y) = \theta(x, y),$$

on a

$$S_{i,j} = \sum_m x_m^{j-i} y_m^i,$$

et ces expressions pourront être calculées par la méthode de Poisson (Serret, *Algèbre supérieure*, p. 103).

Enfin si l'on fait

$$\alpha = r + 1$$

et

$$S_i = y_1^i + y_2^i + \ldots + y_n^i,$$
$$T_i = x_1 y_1^i + x_2 y_2^i + \ldots + x_n y_n^i,$$

on a

$$A_{r,s} = y(xS_{\beta-2} - T_{\beta-2}) - (xS_{\beta-1} - T_{\beta-1}),$$

et en conséquence

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} xS_0 - T_0 & xS_1 - T_1 \ldots & xS_1 - T_r \\ xS_1 - T_1 & xS_2 - T_2 \ldots & xS_{r+1} - T_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ xS_{r-1} - T_{r-1} & xS_r - T_r \ldots & xS_{2r-1} - T_{2r-1} \\ 1 & y \ldots & y^r \end{vmatrix}$$

Ces dernières fonctions ont déjà été considérées par M. Hermite dans un cas particulier.

Il est évident qu'avec la méthode qu'on a suivie dans ce paragraphe pour établir le théorème IV et son corollaire, on pourra trouver des théorèmes et des corollaires analogues en considérant trois équations à trois inconnues, etc. (*).

IV.

Application des propriétés exposées dans le § Ier.

Soit

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} A_{1,1} - x & A_{2,1} \ldots & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} - x \ldots & A_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1,n} & A_{2,n} \ldots & A_{n,n} - x \end{vmatrix} = 0.$$

Il est connu que, en supposant $A_{r,s} = A_{s,r}$ cette équation a toutes ces racines réelles, et M. Hermite a fait observer récemment que cette propriété a lieu aussi lorsque les quantités $A_{r,s}$ sont imaginaires, $A_{r,s}$ et $A_{s,r}$ étant conjugués et $A_{r,r}$ réels. En posant

$$x = h, \quad x = k$$

dans la suite

$$\varphi(x), \ \varphi'(x), \ \varphi''(x), \ldots, \ \varphi^{(n)}(x)$$

la différence entre les nombres des variations correspondantes sera donc le nombre des racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0$$

comprises entre h et k. Or, en posant dans le déterminant (13) (§ Ier, n° 5) $A_{r,r} - x$ au lieu de $A_{r,r}$, on voit facile-

---

(*) Ce beau travail fait entrevoir que le théorème de Sturm peut s'étendre à un système quelconque d'équations algébriques et se rattache immédiatement à la théorie des déterminants; théorie à peu près inconnue. Tm.

ment que, à un facteur près, on a

$$\varphi^n(x) = 1, \quad \varphi^{(n-1)}(x) = -A_1, \ldots,$$
$$\varphi'(x) = (-1)^{n-1} A_{n-1}, \quad \varphi(x) = (-1)^n A_n$$

et la différence entre les nombres des permanences de signes de la suite

$$1, \; A_1, \; A_2, \ldots, \; A_n$$

correspondantes à $x = h$, $x = k$ sera le nombre des racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0$$

comprises entre h et k. Et parce que en posant

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} A_{1,1} - x & A_{2,1} \ldots & A_{r,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} - x \ldots & A_{r,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{r,1} & A_{2,r} & A_{r,r} - x \end{vmatrix}$$

la série

$$1, \; \Delta_1, \; \Delta_2, \ldots \; \Delta_n$$

donnera un même nombre de permanences que la série ci-dessus, on a le théorème :

THÉORÈME V. *La différence entre le nombre des permanences de signes dans cette dernière série correspondantes à* $\mathrm{x} = \mathrm{h}$, $\mathrm{x} = \mathrm{k}$ *donne le nombre des racines de l'équation*

$$\varphi(x) = 0$$

comprises entre h *et* k (*Comptes rendus*, 6 août 1855, *Remarque sur un théorème de M. Cauchy*, par M. Hermite).

On voit que cette dernière série est beaucoup plus simple que la série supérieure donnée par le théorème de Budan-Fourier.

Les Mémoires de MM. Hermite et Sylvester qu'on a trouvés plusieurs fois cités dans ce travail sont les suivants : *Sur l'extension du théorème de M. Sturm à un système d'équations simultanées* (*Comptes rendus*, 1852, 2e semestre, p. 52). — *Remarque sur le théorème de M. Sturm* (*Comptes rendus*, 1853, 1er semestre, p. 294). — *On a theory of the syzigetic relations of two rationel integral functions, etc.* (*Philosophical Transactions*, 1853, part. III). C'est par ces travaux que ces deux illustres géomètres ont établi sur sa vraie base cette importante partie de l'Algèbre supérieure.

SPÉCIMEN DES CINQ EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1855).

M. SERRET,

Examinateur du premier degré.

Convergence des séries à termes alternativement positifs et négatifs.— Variation d'une fonction entière de x lorsque x passe de $-\infty$ à $+\infty$. Exemple :

$$x^3 - 3x^2 - x + 3.$$

— Coefficients angulaires des deux tangentes que l'on peut mener à l'hyperbole par un point extérieur. — Lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hyperbole. — Equation d'un cône de révolution dont le sommet est à l'origine.

M. HERMITE,

Examinateur du premier degré.

Division algébrique. — Faire voir qu'on ne peut

mettre une fonction F (x) que d'une seule manière sous la forme $\varphi(x) \times Q + R$, R étant de degré inférieur à $\varphi(x)$. — Sin $(a+b)$; peut-on, par le moyen des dérivées, tirer de la formule

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

la formule

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b\ ?$$

— Directrice dans les courbes du second degré. — Peut-on mettre l'équation à trois variables sous la forme

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = (mx + ny + pz + q)^2 ?$$

— Equilibre du treuil.

M. WERTHEIM,
Examinateur du second degré.

Une équation du degré m ne peut avoir que m racines. — Interpolation : formule de Newton. — Parallélogramme des forces. — Centre de gravité du tétraèdre. — Electrophore. — Compressibilité des liquides. — Combinaisons de l'azote et de l'oxygène.

M. LEFÉBURE,
Examinateur du second degré.

Décomposer un polynôme en facteurs du premier degré. — Exemple :

$$x^3 + x^2 + x + 1.$$

— Discussion des différents genres de courbes compris dans l'équation

$$(y - ax - b)^4 = px^4 + qx + r.$$

— Volume engendré par un polygone circonscrit à un cercle tournant autour d'un diamètre. — Volume du cône

tronqué. — Intersection des surfaces. — Principes généraux. — Cas d'une surface de révolution dont l'axe est quelconque et d'un plan. — Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. — La rendre calculable par logarithmes.

M. DIDION,
Examinateur du second degré, Président du jury d'examen.

Deux angles qui ont les côtés parallèles et de même sens sont égaux et leurs plans sont parallèles. — Mesure de l'angle de deux plans. — Par une droite donnée mener un plan qui fasse avec une autre droite déterminée un angle donné. — Equilibre de la poulie. — Travail absorbé par le frottement. — Comparateur. — Oxyde de carbone.

Courbes.

$$\rho = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \omega}, \quad \rho = \frac{1}{\sin \omega + \cos \omega},$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{x + 1}; \quad x^2 y - xy - 1 = 0, \quad y^4 = x^4 - 4x,$$

$$y^2 + x^2 - x - y - 1 = 0, \quad y^2 = x^4 - x^2 - x - \tfrac{1}{4}, \quad y = x^{\frac{1}{x}}.$$

Surfaces.

$$xy - 3xz = 2, \quad xy - x^2 - z^2 = a, \quad z^2 - 2xy - 2x = 1.$$

Équation transcendante.

$$2{,}5 \sin x + 3{,}7 \cos x = 4{,}1.$$

Note. Cette équation se ramène à la forme

$$\sin(x + a) = b \cos a.$$

LIMAÇON DE PASCAL;

Par M. MANNHEIM,
Officier d'Artillerie.

Extrait d'une Lettre.

Une partie de la question longuement traitée par M. Painvin dans le dernier numéro des *Nouvelles Annales* est généralement connue sous cet énoncé :

Le lieu du sommet d'un angle constant dont les côtés sont tangents à deux circonférences données se compose de plusieurs limaçons de Pascal.

Pendant le mouvement de l'angle constant, *un point quelconque décrit sur le plan des deux cercles un limaçon de Pascal; une droite quelconque enveloppe une circonférence.*

Un point quelconque du plan fixe des deux cercles trace sur le plan mobile une ellipse.

Les démonstrations géométriques de ces propriétés sont excessivement simples.

On peut encore ajouter les propriétés suivantes, également très-simples.

Si l'on considère une position quelconque de l'angle mobile, la circonférence qui passe par le sommet de cet angle et par les points de contact de ses côtés et de circonférences données contient les pôles des limaçons de Pascal du lieu précédemment énoncé. Le lieu des centres de ces circonférences se compose de deux circonférences.

QUESTIONS.

335. Etant donnés deux cercles dans un même plan, alors dans le triangle formé par les deux tangentes intérieures et une tangente extérieure, le rectangle des deux côtés qui sont tangentes intérieures est équivalent à la somme du rectangle des deux tangentes intérieures arrêtées au point de contact, et du rectangle des deux rayons.

(A. Burlet, de Dublin.)

336. Un triangle rectangle est équivalent au rectangle des deux segments faits sur l'hypoténuse par le point de contact du cercle inscrit.

(A. Burlet, de Dublin.)

337. Soit ABCD un quadrilatère quelconque; si, par le point de concours (T) des perpendiculaires élevées de deux sommets consécutifs (A, B) sur les côtés opposés (AD, BC) qui y aboutissent, on mène une perpendiculaire (TE) à la droite (RS) qui joint les milieux des diagonales, cette perpendiculaire divisera le côté (AB) en deux segments (AE, BE) inversement proportionnels aux projections (AH, BK) des côtés AD et BC sur AB.

En sorte qu'on aura

$$\frac{AE}{BE} = \frac{BK}{AH}.$$

(Jules Vieille.)

338. Prolongez la base BC d'un triangle isocèle ABC, d'une longueur CD égale à BC; joignez D au milieu E de AB; la droite DE rencontre AC en F et l'on a

$$CF = \frac{1}{3} AC = \frac{1}{3} AB;$$

portez CF sur AB de A en G; menez DG qui rencontre

AC en H milieu de AC; soit I le point d'intersection des diagonales GF, EH du quadrilatère GHEF; menez DI qui rencontre AB en K, on aura

$$AB = 15\,GK = 10\,EK.$$

339. Toutes les circonférences ayant leurs centres sur une même droite et coupant à angle droit une circonférence donnée ont même axe radical; et toutes ces circonférences prises deux à deux, et la circonférence donnée, ont même centre radical. (MANNHEIM.)

340. Soient donnés un angle trièdre de sommet S et un point fixe O par lequel on mène un plan coupant les faces de l'angle suivant le triangle ABC; trois parallèles aux côtés du triangle et passant par le point O partagent ce triangle en trois parallélogrammes et trois triangles; V_1, V_2, V_3 étant les volumes de trois pyramides ayant pour bases ces parallélogrammes et S pour sommet commun, la somme $\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3}$ est constante, de quelque manière qu'on mène le plan coupant par le poit fixe O. (MANNHEIM.)

SUR UNE TRANSFORMATION DE LA FORMULE DE THOMAS SIMPSON

(voir t. XIII, p. 323).

Soient $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{2n+3}$ des points en nombre impair pris sur une courbe plane ne présentant dans cet intervalle aucun point singulier. Menons les ordonnées rectangulaires M_1A_1, M_2A_2, $M_3A_3, \ldots, M_{2n+3}A_{2n+3}$. Supposons que ces ordonnées soient équidistantes.

Notations.

$$M_1A_1 = e, \quad M_2A_2 = y_1,$$

$$M_3A_3 = y_2, \ldots, \quad M_{2n+2}A_{2n+2} = y_{2n+1}, \quad M_{2n+3}A_{2n+3} = E,$$

$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 \ldots = A_{2n+2}A_{2n+3} = h.$$

$\sum y_p =$ somme de tous les y qui ont un indice pair;

$\sum y_i =$ somme de tous les y qui ont un indice impair;

$P' =$ aire du polygone formé par les cordes $M_1 M_2$, $M_2 M_3, \ldots, M_{2n+2} M_{2n+3}$, par les ordonnées extrêmes e, E et par la partie $A_1 A_{2n+3}$ de l'axe intercepté entre ces ordonnées;

$P =$ aire du polygone formé par les cordes $M_1 M_3$, $M_3 M_5$, $M_5 M_7, \ldots, M_{2n+1} M_{2n+3}$, par les ordonnées extrêmes e, E et par la partie de l'axe $A_1 A_{2n+3}$ interceptée entre ces ordonnées;

$S =$ aire du quadrilatère mixte formé par l'aire curviligne $M_1 M_2 \ldots M_{2n+1}$, les ordonnées extrêmes e, E et l'axe $A_1 A_{2n+3}$.

On a évidemment

$$P' = \frac{h}{2}\left(e + E + 2\sum y_p + \sum y_i\right),$$

$$P = h\left(e + E + 2\sum y_p\right),$$

d'où

$$\frac{P' - P}{3} = \frac{h}{6}\left(2\sum y_i - 2\sum y_p - e - E\right),$$

$$P' + \frac{P' - P}{3} = \frac{h}{3}\left(e + 4\sum y_i + 2\sum y_p + E\right).$$

Par la formule de Simpson, on a

$$S = \frac{h}{3}\left(e + 4\sum y_i + 2\sum y_p + E\right) \ (*),$$

donc

$$S = P' + \frac{P' - P}{3}.$$

(*) *Voir* t. XIII, p. 325.

Cette formule a été donnée par M. Saigey (*Géométrie élémentaire*, p. 245). M. Piobert l'a indiquée explicitement (t. XIII, p. 327, § 3), mais ne s'y est pas arrêté, parce que cette formule présente les mêmes inconvénients que celle de Simpson, donnant absolument les mêmes résultats, et il indique des formules qui font disparaître en partie ces inconvénients.

On sait d'ailleurs que les formules qui servent à calculer l'aire d'un cercle servent également pour le calcul du périmètre.

Les raisonnements qu'emploie M. Saigey pour parvenir à la formule sont très-élémentaires, mieux appropriés peut-être à l'enseignement que ceux de Simpson.

NOTE SUR LA SOMMATION DE CERTAINES SÉRIES;

PAR E. CATALAN.

Soit $F(n)$ une fonction entière de n égale au produit de *quelques-uns* des p facteurs $n, n+1, n+2, n+3, \ldots, (n+p-1)$. Soit $f(n)$ une autre fonction entière de n, première par rapport à $F(n)$, et dont le degré soit de *deux* unités au moins inférieur au degré de $F(n)$ (*). Une remarque fort simple, et qui à raison même de sa simplicité n'avait peut-être pas été faite, permet de sommer très-aisément la série dont le terme général est

$$u_n = \frac{f(n)}{F(n)}.$$

Pour le faire voir, prenons un cas particulier, et, par exemple,

$$u_n = \frac{n^2 - 3n + 7}{n(n+1)(n+3)(n+4)}.$$

(*) Sans cette dernière condition la série ne serait pas convergente.

Au lieu de décomposer, par la méthode connue, u_n en fractions ayant pour dénominateur les facteurs n, $n+1$, $n+3$, $n+4$, posons

$$\frac{n^2-3n+7}{n(n+1)(n+3)(n+4)} = \frac{A}{n(n+1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)} + \frac{C}{(n+2)(n+3)} + \frac{D}{(n+3)(n+4)},$$

A, B, C, D étant des constantes.

Pour les déterminer, chassons les dénominateurs et faisons, successivement,

$$n=0,\quad n=-1,\quad n=-2,\quad n=-3.$$

Nous trouverons

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} 14 &= 24A,\\ 11 &= 6A-6B,\\ 0 &= -4B+4C,\\ -25 &= 6C-6D; \end{aligned}\right.$$

puis

$$(3)\qquad A=\frac{7}{12},\quad B=-\frac{5}{4},\quad C=-\frac{5}{4},\quad D=\frac{35}{12}\ (^*).$$

Soit actuellement

$$S_n = u_1+u_2+\ldots+u_n;$$

c'est-à-dire

$$S_n = A\sum_1^n \frac{1}{n(n+1)} + B\sum_1^n \frac{1}{(n+1)(n+2)} + C\sum_1^n \frac{1}{(n+2)(n+3)} + D\sum_1^n \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

(*) Sans qu'il soit nécessaire d'insister sur ce point, on voit bien, d'après la manière dont les inconnues A, B, C, D s'enchaînent dans les équations (1), que, *dans tous les cas, la décomposition essayée sera possible, et possible d'une seule manière.*

ou

$$(3)\quad \begin{cases} S_n = A\sum_1^n \frac{1}{n(n+1)} + B\sum_2^n \frac{1}{n(n+1)} \\ \quad + C\sum_3^n \frac{1}{n(n+1)} + D\sum_4^n \frac{1}{n(n+1)}. \end{cases}$$

Mais (et c'est là la remarque à laquelle nous faisions allusion en commençant)

$$\sum_1^n \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1};$$

donc

$$S_n = A\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + B\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) + C\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+1}\right) + D\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n+1}\right),$$

ou

$$(4)\ S_n = A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D - (A + B + C + D)\frac{1}{n+1}.$$

Par suite,

$$(5)\qquad \lim S_n = A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D.$$

En remplaçant les coefficients par leurs valeurs, on trouve

$$S_n = \frac{13}{48} - \frac{1}{n+1},$$

et

$$\lim S_n = \frac{13}{48}.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 316

(voir page 52);

PAR M. LÉON DURAND,
Élève au petit séminaire d'Iseure.

Toute progression arithmétique où la raison et le premier terme sont premiers entre eux, renferme un nombre infini de termes premiers à un nombre donné quelconque.

(JACOBI.)

Démonstration.

$$k = a + xr$$

est un terme de cette progression dont le premier terme est a et la raison r.

Soit α le produit des facteurs communs à a et au nombre donné p;

Soit p' le produit des facteurs premiers de p qui ne divisent point a.

Si 6 représente un nombre premier avec α et plus petit que lui, $(n\alpha + 6)$ sera premier avec α.

Si donc on fait

$$x = (n\alpha + 6)p',$$

alors

$$k = a + (n\alpha + 6)p'r,$$

et k sera premier avec p; car un facteur premier ϖ commun à p et à k, ou bien divisant α, diviserait a, mais non $(n\alpha + 6)p'r$, ou bien, divisant p', diviserait $(n\alpha + 6)p'r$, mais non a.

Or n est un nombre quelconque, j'en conclus pour k une infinité de valeurs.

Note. M. Dirichlet a démontré que toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont premiers entre eux renferme une infinité de nombres premiers. Si l'on admet que toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont premiers entre eux renferme au moins un nombre premier, le théorème de M. Dirichlet découle immédiatement du théorème de Jacobi. Il suffit de prendre pour p le produit de tous les nombres premiers renfermés dans la progression $a + xr$ et de considérer la progression

$$(\alpha + 6p'r) + n(\alpha p'r);$$

on conclurait que les termes de cette dernière progression n'ont aucun diviseur premier de la forme $a + xr$, et qu'en conséquence cette progression ne renferme aucun nombre premier, contrairement au principe admis. Il n'existe donc aucun nombre p qui soit le produit de tous les nombres premiers renfermés dans la formule $a + xr$; ces nombres premiers sont donc en nombre illimité.

(PEPIN S. J.)

SOLUTION DE LA QUESTION 320

(voir p. 53);

PAR M. GEORGE BERTRAND,
Élève du collége Rollin (classe de M. Suchet).

Soit

$$y = f(x),$$

y étant le prix total et x la profondeur du puits; augmentant de Δx cette profondeur, le prix augmentera de Δy.

Le volume enlevé est proportionnel à Δx, puisque la largeur du puits reste constante.

Donc

$$\Delta y = \Delta x . x . a,$$

x étant la profondeur du puits à ce moment et a le prix payé pour enlever un volume de déblais ayant pour base la section du puits et pour hauteur l'unité.

Cette égalité sera vraie à la limite et l'on aura

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = ax,$$

d'où

$$y = \frac{ax^2}{2} + C;$$

pour $x = 0$, $y = 0$, donc

$$C = 0.$$

Pour creuser un puits de 60 mètres, le prix est 100 francs, donc

$$100 = a \frac{60^2}{2},$$

ou

$$a = \frac{1}{18};$$

le puisatier s'arrêtant au bout de 30 mètres, on a

$$y = \frac{1}{18} \cdot \frac{30^2}{2} = 25.$$

Donc le puisatier devra recevoir 25 francs.

SOLUTION DE LA QUESTION 326 (PROUHET)

(voir page 329);

Par M. Hippolyte PLESSIX,
Élève du collége Rollin (classe de M. Suchet),

Et M. A. ROUSSIN,
Élève du lycée Bonaparte (classe de M. Bouquet).

Si les racines d'une équation du troisième degré sont p^2, q^2, $2pq$, les racines de la dérivée sont rationnelles.

En effet, une équation du troisième degré admettant les racines p^2, q^2, $2pq$ sera de la forme

$$(1)\quad x^3 - (p+q)^2 x^2 + (p^2 q^2 + 2p^3 q + 2pq^3) x + \text{K} = 0.$$

Alors l'équation dérivée sera

$$(2)\quad 3x^2 - 2(p+q)^2 x + (p^2 q^2 + 2p^3 q + 2pq^3) = 0,$$

et les racines de cette équation seront

$$x = \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^4 - 3p^2 q^2 - 6p^3 q - 6pq^3}}{3}.$$

Pour prouver que ces racines sont rationnelles, il n'y a qu'à prouver que la quantité sous le radical est un carré parfait. Or cette quantité égale

$$p^4 - 2p^3 q + 3p^2 q^2 - 2pq^3 + q^4,$$

polynôme qui est le carré de $(p^2 - pq + q^2)$.

Donc les racines de l'équation (2) sont rationnelles.

Note du Rédacteur. M. l'abbé Sauze, S. J., professeur au collége Sainte-Marie à Toulouse, donne la même solution.

SOLUTION DE LA QUESTION 328

(voir p. 230);

Par M. JOZON,
Élève de Logique (Sciences), lycée Louis-le-Grand
(classe de M. Lecaplain),

Et M. E. GILLOTIN,
Élève du collége Rollin (classe de M. Suchet) (*).

Connaissant la somme de deux nombres et le produit de la somme de leurs carrés par la somme de leurs cubes, trouver ces nombres.

Si x et y sont les deux nombres inconnus, m leur somme et p^5 le produit de la somme de leurs carrés par la somme de leurs cubes, il suffit, pour résoudre la question, de trouver les solutions des deux équations

$$(1)\qquad x+y=m,$$

$$(2)\qquad (x^2+y^2)(x^3+y^3)=p^5.$$

Pour cela, de l'équation (1) je tire

$$x^2+y^2=m^2-2xy,$$
$$x^3+y^3=m^3-3xy(x+y)=m^3-3mxy.$$

Remplaçant dans l'équation (2) x^2+y^2 et x^3+y^3 par leurs valeurs, on obtient l'équation

$$p^5=m^5+6mx^2y^2-5m^3xy.$$

Si l'on prend xy pour inconnue, l'équation se trouve ramenée au second degré, et on tire pour xy la valeur

$$(3)\qquad xy=\frac{5m^3\pm\sqrt{m^6+24mp^5}}{12m}.$$

(*) M. Perret, professeur de physique au lycée de Périgueux, ramène la solution à la sommation des racines d'une équation du deuxième degré.

Je connais ainsi la somme et le produit des nombres x et y. Ces deux nombres sont donc les racines de l'équation

$$z^2 - mz + \frac{5m^3 \pm \sqrt{m^6 + 24mp^5}}{12m} = 0,$$

d'où

$$z = \frac{3m^2 \pm \sqrt{-6m^4 - m^4 \mp 3m\sqrt{m^6 + 24mp^5}}}{6m}.$$

Les quantités m et p étant positives, pour que les valeurs de z puissent être réelles, il faut prendre le second radical avec le signe $+$. Si alors je suppose que x soit le plus grand des deux nombres proposés, j'aurai

$$x = \frac{3m^2 + \sqrt{-6m^4 + (\sqrt{m^6 + 24mp^5})\,3m}}{6m}$$

et

$$y = \frac{3m^2 - \sqrt{-6m^4 + (\sqrt{m^6 + 24mp^5})\,3m}}{6m}.$$

Discussion des valeurs de x *et de* y (*).

Pour que les valeurs trouvées pour x et y conviennent, il faut et il suffit qu'elles soient réelles et positives.

Pour qu'elles soient réelles, il faut et il suffit que l'on ait

$$3m\sqrt{m^6 + 24mp^5} > 6m^4,$$

ou bien

$$9m^8 + 216m^3p^5 > 36m^8,$$

ou enfin

$$8p^5 > m^5.$$

(*) Cette discussion est de M. Jozon

Je suppose maintenant que m^5 soit toujours plus petit que $8p^5$. Dans ce cas, la valeur de x est réelle et positive, celle de y est réelle. Pour qu'elle soit positive, il faut et il suffit que l'on ait

$$3m^2 > \sqrt{-6m^4 + 3m\sqrt{m^6 + 24mp^5}},$$

ou

$$15m^4 > 3m\sqrt{m^6 + 24mp^5},$$

ou enfin

$$m^5 > p^5.$$

Ainsi donc, les valeurs trouvées pour x et y conviendront toujours, quand on aura à la fois

$$8p^5 > m^5 \quad \text{et} \quad p^5 < m^5,$$

et ne conviendront jamais quand l'une de ces conditions ne sera pas remplie.

Si l'on suppose p constant, la plus grande valeur qu'on puisse donner à m^5 est donc

$$m^5 = 8p^5$$

et alors la quantité sous le radical s'annulant, $x = y = \frac{m}{2}$, et la plus petite valeur qu'on puisse donner à m^5 est

$$m^5 = p^5$$

et, dans ce cas, $x = m$ et $y = 0$.

SOLUTION DE LA QUESTION 329

(voir page 230);

Par M. A. FINOT,
Élève du collége Rollin (classe de M. Suchet).

Dans une progression géométrique de quatre termes, on donne la somme des antécédents et la somme des conséquents, trouver ces termes sans opérer d'élimination.

Soient a, b, c, d les termes, on a

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d};$$

je fais

$$a+b+c=m,\quad b+c+d=n,$$

m et n sont des nombres donnés.

1°. D'après les théorèmes connus sur les rapports égaux, nous avons

$$\frac{abc}{bcd}=\frac{a}{d}=\frac{m^3}{n^3}$$

et

$$(1)\qquad \frac{a-d}{d}=\frac{m^3-n^3}{n^3};$$

de plus

$$\frac{a}{b}=\frac{m}{n},$$

et en ajoutant les termes de $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$,

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{m}{n},$$

d'où

$$\frac{a+c-b-d}{b+d}=\frac{m-n}{n};$$

d'ailleurs

$$\frac{m-n}{n}=\frac{b-c}{c},$$

nous pouvons donc ajouter au rapport précédent les termes $b-c$ et c, ce qui donnera

$$(2) \qquad \frac{a-d+c-b-c+b}{b+c+d}=\frac{a-d}{n}=\frac{m-n}{n}.$$

Divisons (1) par (2), il viendra

$$\frac{n}{d}=\frac{n(m^3-n^3)}{n^3(m-n)}=\frac{m^2+mn+n^2}{n^2},$$

d'où finalement

$$d=\frac{n^3}{m^2+mn+n^2}$$

et

$$c=\frac{mn^2}{m^2+mn+n^2},$$

$$b=\frac{m^2n}{m^2+mn+n^2},$$

$$a=\frac{m^3}{m^2+mn+n^2},$$

car, la raison

$$q=\frac{m}{n}.$$

Note du Rédacteur. M. l'abbé Sauze et M. Jean Molard, étudiant, prennent x pour premier terme, et l'on a

$$m+n=x\left(1+\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}+\frac{n^3}{m^3}+\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}\right),$$

d'où

$$x=\frac{m^3}{m^2+n^2+mn}.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 330

(voir page 230) ;

PAR UN ABONNÉ (*),

ET M. JEAN MOLARD,

Étudiant.

En employant les notations de M. Lebesgue, on a, pour les deux dernières racines,

$$-\frac{i}{2} \pm \frac{1}{x} \sqrt{-3i^2 - 4q}.$$

Il faut donc vérifier que

$$(3i^2 + 4q)(4q^3 + 27r^2) = (6qi^2 - 9ri + 4q^2),$$
$$= 36q^2i^4 - 108qri^3 + 48q^3i^2 + (9ri - 4q^2)^2;$$

ou, en observant que $i^3 = -qi - r$,

$$(3i^2 + 4q)(4q^3 + 27r^2)$$
$$= (12q^3 + 81r^2)i^2 + 108qr^2 + 16q^4.$$

Cette équation est identique.

Note du Rédacteur. M. J. de Virieu, régent à Saumur, ramène aussi la solution à une identité, directement sans vérification. Incessamment une démonstration générale de M. Brioschi, fondée sur cette magnifique propriété que deux racines quelconques d'une équation algébrique sont des fonctions *rationnelles* de toutes les autres racines, et qu'on lira avec admiration, du moins qu'on pourra lire en septembre.

(*) La formule donnée à la page 230 contient une faute typographique : on doit lire $4q^3 + 27r^2$ au lieu de $4q^2 + 27r^2$.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

LETTRE SUR LE PROBLÈME :

Trouver une droite qui rencontre quatre droites données,

PRÉCÉDÉE D'UNE OBSERVATION AU RÉDACTEUR ;

PAR M. A. CHEVILLARD,
Professeur de Mathématiques et de Géométrie descriptive.

Monsieur le Rédacteur,

Vous avez raison de dire qu'Olivier n'a fait qu'introduire en géométrie descriptive une méthode employée depuis longtemps dans les épures de charpente. On a dit de même que Monge, en créant la géométrie descriptive, n'avait fait que généraliser des procédés connus bien avant lui des charpentiers et des tailleurs de pierre. Il s'agit donc seulement entre nous de savoir si l'innovation (*) d'Olivier est utile à la science du dessin. Vous, monsieur le rédacteur, vous dites à peu près non (**). Les praticiens, forts de leur expérience journalière, affirment le contraire. Pour que vos lecteurs puissent choisir entre ces deux opinions opposées, il est bon de leur rappeler que toutes les écoles industrielles ont adopté les idées d'Olivier (***); qu'en 1850, l'école théorique par excellence, c'est-à-dire l'Ecole Polytechnique, introduisait ces idées dans son programme. Aussi dès lors propose-t-on dans les concours annuels des questions dont la solution exige, le plus sou-

---

(*) Je nie l'innovation. Monge et Olivier! quelle terrible comparaison!
TM.

(**) J'ai dit, au contraire, que les changements de plans sont souvent très-utiles, même indispensables. Mais cette utilité ne date pas d'Olivier.
TM.

(***) Qui inspectait ces écoles. TM.

vent, des changements de plan. Au lieu de laisser au choix du candidat les dimensions et la position de corps dont il doit construire l'intersection, on lui détermine par des nombres les éléments de la question.

Dira-t-on que les questions des premiers concours ont été données sous l'influence d'Olivier? (*) Je répondrai que l'Ecole Polytechnique persiste aujourd'hui avec raison dans les mêmes errements (**); car elle a maintenu les changements de plan dans son programme et continué de proposer sur cette méthode des questions dont vous avez publié annuellement les énoncés en les accompagnant le plus souvent d'éloges. Je n'en citerai qu'un exemple remarquable tiré du concours de 1854 :

« Une calotte sphérique creuse repose par sa base sur
» le plan horizontal; le rayon extérieur de cette base est
» de $0^m,10$, le rayon intérieur est de $0^m,035$. La hauteur
» de la calotte mesurée jusqu'à la surface extérieure est
» de $0^m,03$. Par le centre de la base, on mène une droite
» parallèle à la diagonale d'un cube dont une face serait
» sur le plan horizontal et une autre sur le plan vertical;
» puis on prend cette droite pour l'axe d'un cylindre dont
» la section droite serait un cercle de $0^m,03$ de diamètre.
» Cela posé, on veut connaître l'intersection de ce cylin-
» dre avec les deux surfaces sphériques qui limitent la
» calotte creuse, ainsi que la tangente en un point quel-
» conque d'une de ces courbes. On construira, en outre,
» le développement de la surface cylindrique du solide
» commun aux deux corps. »

Enfin, si toutes ces raisons, qui font suite aux raisons théoriques insérées en mai dernier, étaient encore regardées comme insuffisantes, je pourrais placer la méthode

(*) Oui TM.
(*) C'est une erreur. TM.

des changements de plan sous la recommandation d'un nom dont vos lecteurs ne déclineraient pas la compétence, je veux parler de M. Bardin, dont votre journal apprécie si bien le talent, et qui, sous le nom de *projections auxiliaires*, n'a cessé d'enseigner la même méthode (*).

En terminant, je crois devoir m'associer entièrement au regret que vous manifestez en ces termes dans le numéro de janvier 1855 : « On cherche avec raison à répandre et à populariser cette langue universelle qu'on appelle le *dessin*. Pourquoi cette langue est-elle exclue des concours universitaires? » Et je crois être conséquent en déclarant n'entendre aucunement l'observation que vous faites en mai 1856, à savoir qu'*il faut employer avec économie, éviter même, autant que possible, les changements de plans* (**); car les personnes qui connaissent la théorie de la transformation des projections savent bien à quelle grande classe générale de problèmes cette méthode *doit* s'appliquer, sans rien de vague ni d'indéterminé (mai, page 202), et qu'elle est, au contraire, destinée à produire l'économie en même temps que la visibilité des constructions graphiques.

1. Quand la solution d'un problème ne dépend pas de la position particulière de ses données, on évite la complication des théories et surtout l'emploi des courbes auxiliaires par la méthode d'Olivier. Il faudrait se procurer les mêmes avantages pour les problèmes dont la solution dépend principalement de la position des données. C'est pour ce cas, heureusement bien moins utile que l'autre, que le dessinateur est livré à ses ressources personnelles, faute de règles assez générales. Je citerai seu-

---

(*) Nous publierons incessamment les observations de M. Bardin, qui doit savoir mieux que personne ce qu'il enseigne. TM.

(**) Je ne vois aucune connexion entre ce regret que j'exprime encore aujourd'hui et les changements de plans de projection. TM.

lement l'ellipse à projections droite et circulaire (*), la sphère inscrite aux surfaces de révolution développables ou non, comme d'excellents moyens de simplification (*Géométrie descriptive* de M. Adhémar) aussi avantageux que peu répandus. Mais, pour résoudre la question qui fait l'objet de cette Note, je dois rappeler d'abord les problèmes suivants :

1°. *Déterminer le contact d'un plan quelconque passant par une génératrice rectiligne de surface gauche doublement réglée* S, *avec cette surface donnée soit par trois directrices droites, soit par deux directrices droites avec un plan directeur;* problème résolu sans tracé de courbe à l'aide de la double génération rectiligne (Leroy, Olivier, etc.). Simplification remarquable si S est de révolution.

Le même problème est résolu pour une surface gauche quelconque par l'emploi de l'hyperboloïde et mieux du paraboloïde de raccordement sur la génératrice donnée.

2°. *Circonscrire un cône de sommet* m *ou un cylindre de direction* R *à une surface gauche doublement réglée* S. On sait que la ligne de contact est une conique dont le plan est polaire de *m* ou conjugué à R. On déterminera trois points de ce plan à l'aide de trois plans passant par trois génératrices rectilignes et par *m* ou parallèlement à R et dont on cherchera les contacts 1, 2, 3 (1°). On déterminera ensuite divers points de la conique de contact par les rencontres de diverses génératrices de S avec le plan 1, 2, 3. Ainsi, pas de courbe auxiliaire pour déterminer chaque point de la ligne de contact et, à la rigueur, même avantage pour une surface gauche quelconque, si l'on veut s'en préoccuper.

(*) C'est-à-dire dont une projection est une droite et l'autre un cercle.

TM.

Jusqu'ici ces questions sont connues comme je l'indique, quoique dans un sens évidemment moins pratique; mais je ne sache pas qu'on en ait profité pour résoudre, *sans courbes à tracer,* les trois problèmes suivants :

2. *Mener par une droite* D *un plan tangent à une surface gauche doublement réglée* S *et déterminer les contacts* x *et* y.

Construisez le plan 1, 2, 3 de la conique de contact d'un cône circonscrit à S par un point m de D (n° 1, 2°). Les points x, y seront dans ce plan. Construisez le plan 6, 7, 8 de la conique de contact d'un cône circonscrit à S par un point n de D, plan qui contiendra encore x et y. Ces deux points seront donc à l'intersection E des plans 1, 2, 3, 6, 7, 8; D et E étant, comme on sait, deux droites polaires conjuguées, un troisième plan correspondant à un nouveau point de D ne servirait à rien. L'un des plans 1, 2, 3, 6, 7, 8 peut être fourni par un cylindre de direction D circonscrit à S.

Cela posé, reste à trouver les intersections x, y, de E avec S. Procurez-vous deux nouveaux points 4 et 5 de la conique 1, 2, 3 (n° 1). Par deux changements de plans de projection successifs, rabattez sur le papier les points 1, 2, 3, 4, 5 et la droite E. La question sera ramenée à trouver l'intersection d'une droite E avec une conique donnée par cinq points 1, 2, 3, 4, 5. Si l'on joint deux quelconques de ces cinq points aux trois autres, on formera deux faisceaux dont les rayons divisent homographiquement la sécante E en six points conjugués deux à deux. Les points doubles de cette division homographique sont précisément x et y. Il n'y a aucune difficulté à les obtenir, puisque ces six points sont en involution (*Géométrie supérieure* de M. Chasles). Si donc on trouve que ces points doubles sont imaginaires, on en conclura que

le problème est impossible, parce que D ne rencontre pas S. On sait d'ailleurs que la réciproque est vraie.

3. *Trouver les points où une droite* D *rencontre une surface doublement réglée* S.

Cherchez le contact x d'un seul plan tangent mené à S par D (n° 2). Les deux génératrices rectilignes qui passent par x et sont dans le plan xD rencontreront D aux points cherchés. Le second plan tangent qu'on peut mener à S par D fournirait évidemment les deux points précédents, S étant du deuxième degré. Si x est sur D, celle-ci est tangente à S en ce point. Si x n'existe pas, D ne rencontre pas S.

Étant donnée une projection d'un point d'une surface doublement réglée, on pourra toujours trouver l'autre projection sans tracer de courbe; solution qui se simplifie considérablement dans bien des cas, surtout quand S a un plan directeur.

4. *Trouver une droite qui rencontre quatre droites quelconques données sans tracé de courbe* (*).

Soient A, B, C, D les quatre droites données. On concevra l'hyperboloïde à une nappe S déterminé par A, B, C. On cherchera les points x, y où D rencontre cet hyperboloïde, et comme ces points auront été trouvés chacun par une génératrice de S (n° 3) savoir G et G′, ces deux droites rencontreront donc A, B, C, D; d'où deux solutions.

L'hyperboloïde A, B, D fournirait encore deux solutions, etc.; en tout huit solutions se réduisant évidemment aux deux premières. Sans discuter ce problème, je ferai seulement remarquer que si la quatrième droite D était génératrice de l'hyperboloïde A, B, C et de même système

(*) M. Grunert a donné une solution analytique de ce problème (*Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 117).

que ces trois droites, il y aurait une infinité de solutions.

Les détails de l'exécution d'un pareille épure ne peuvent trouver place ici. Pour être compris, on devra partager le travail en plusieurs parties désignées chacune par une couleur particulière. L'habitude du dessin graphique suggérera de grandes simplifications, même dans le cas le plus général.

THEORÈME CONCERNANT QUATRE CONIQUES INSCRITES DANS LE MÊME QUADRILATÈRE;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

1. Théorème. *Soient* C, C′, Σ, Σ′ *quatre coniques inscrites dans un même quadrilatère;* m, m′ *deux des points d'intersection de* Σ *avec* C *et* C′ *respectivement et* n *l'un des points d'intersection de* Σ′ *avec* C. *Si l'on décrit la conique* U *qui est tangente aux quatre côtés du quadrilatère et à la corde* m′ n, *et qu'on fasse rouler cette corde sur la conique* U *jusqu'à ce qu'elle passe par le point* m, *ce qui donne lieu à deux positions distinctes, cette corde, dans chacune de ces deux positions, passera par l'un des points d'intersection de* Σ′ *et de* C′.

2. Pour démontrer ce théorème, je remarque d'abord que si l'on transforme, par voie de *dualité*, la proposition qui fait l'objet du n° 757 de la *Géométrie supérieure*, on obtient la suivante qui en est la *corrélative:*

Étant données trois coniques inscrites dans le même quadrilatère, si une corde de longueur variable roule sur l'une d'elles, tandis que ses extrémités glissent sur les deux autres respectivment, les tangentes à la pre-

mière conique, menées par ces deux extrémités, se coupent sur une quatrième conique inscrite dans le même quadrilatère que les trois autres.

3. Cela posé, soit désignée par M la tangente $m'n$ à la conique U, et soit N une tangente à la même conique menée par le point m. N coupera la conique Σ' en deux points n', n''. Ne nous occupons que de celui de ces deux points qui est situé dans la région de la conique Σ' où serait naturellement amenée l'extrémité n de la corde variable $m'n$, quand on la fait rouler sur U et glisser en même temps sur Σ et Σ' jusqu'à ce qu'elle vienne passer par le point m, conformément à l'hypothèse; et soit n' ce point.

La droite M a ses extrémités m', n situées sur Σ et Σ' respectivement, et la droite N a ses extrémités m et n' sur ces deux mêmes coniques respectivement. Ces deux droites sont tangentes à la conique U; donc, en vertu de la proposition auxiliaire rappelée ci-dessus (n° 2), le point de concours i des tangentes à cette conique menées par les deux points m' et n, et le point de concours i' des deux tangentes à la même conique menées par les deux points m et n', sont sur une sixième conique U' inscrite dans le même quadrilatère que les coniques données.

Actuellement, considérons les droites mi' et ni; elles sont, par construction, tangentes toutes deux à la conique U. Les extrémités de la première sont les points m et i' situés respectivement sur C et U'; celle de la seconde sont les points n et i situés respectivement aussi sur les deux mêmes coniques C et U'. Donc, en vertu de la proposition déjà citée, les tangentes à U, menées par leurs extrémités, doivent se couper deux à deux sur une même conique inscrite dans le même quadrilatère que les coniques données. Ces tangentes sont, d'une part, mn' et $i'n'$

qui se coupent en n', et, d'autre part, nm' et im' qui se coupent en m'. Or m' appartient, par hypothèse, à la conique C'; donc enfin n' appartient aussi à cette conique.

C. Q. F. D.

4. Le quadrilatère du théorème général (n° 1) peut être un parallélogramme. Si ce parallélogramme devient imaginaire, les deux sommets, considérés comme deux *centres d'homologie,* subsistent et conservent toutes leurs propriétés. Dans ce cas, ils sont les foyers communs des coniques données (voir *Traité des propriétés projectives*). La proposition (n° 2) et le théorème général (n° 1) subsistent également. Seulement il faut ajouter que si deux des coniques, C et C' par exemple, sont de même espèce (ellipses ou hyperboles), les deux autres Σ, Σ' sont nécessairement d'espèce différente des premières (hyperboles ou ellipses), sans quoi les points d'intersection m, m', n, n' seraient imaginaires.

5. Les points m, m' seront alors désignés sous le nom de *points correspondants,* et de même les points n et n'.

Le théorème général prend ainsi l'énoncé suivant, qui a été donné pour la première fois sans démonstration par M. Chasles, dans une communication faite à l'Académie des Sciences le 1er juin 1846 au sujet des coniques homofocales:

Si l'on prend sur deux coniques deux systèmes de points correspondants m, m' *et* n, n', *les deux droites* mn', m'n *sont tangentes à une même conique homofocale aux proposées.*

SUR L'ÉVALUATION D'UNE FONCTION ALGÉBRIQUE FRACTIONNAIRE

La variable étant racine d'une équation algébrique donnée ;

D'APRÈS GAUSS.

Met. nova. integr. Comm. Gotting. vol. III, 1814-15, pages 39.

I.

Soient Z, ζ, ζ' trois fonctions entières de z; on demande quelle fonction entière on peut substituer à la fraction $\frac{Z}{\zeta}$, telle qu'en y substituant pour z une racine de l'équation $\zeta' = 0$, on trouve la même valeur qu'en substituant cette racine pour z dans l'expression fractionnaire $\frac{Z}{\zeta}$.

Soient k le degré de ζ et k' le degré de ζ'; on suppose d'ailleurs que ζ et ζ' n'ont pas de facteur commun, de sorte que la fraction $\frac{Z}{\zeta}$ ne peut devenir infinie: ce qui aurait lieu si l'on substituait une racine commune à ζ et à ζ'.

Faisons sur ζ et ζ' les opérations de la recherche du plus grand commun diviseur; on aura cette suite d'équations :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\zeta'' &= \lambda\zeta - p\zeta', \\
\zeta''' &= \lambda'\zeta' - p'\zeta'', \\
\zeta^{\text{IV}} &= \lambda''\zeta'' - p''\zeta''', \\
\zeta^{\text{V}} &= \lambda'''\zeta''' - p'''\zeta^{\text{IV}}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\zeta^{(m)} &= \lambda^{(m-2)}\zeta^{(n-2)} - p^{(m-2)}\zeta^{(m-1)}.
\end{aligned}\right.$$

Les ζ à partir de ζ'' sont les résidus des divisions, fonc-

tions entières dont le coefficient du premier terme est l'unité; et soient k'', k''', k^{iv},..., $k^{(m)}$ les degrés successifs de ces résidus. Ces nombres k, k', k'',..., $k^{(m)}$ vont toujours en décroissant et enfin $k^{(m)}=0$; $p, p', p'',\ldots, p^{(m-1)}$ sont des fonctions entières de z de l'ordre $k-k'$, $k'-k''$, $k''-k'''$; les λ sont des nombres, et $\zeta^{(m)}=1$; car le dernier reste doit être l'unité puisque les fractions n'ont pas de diviseur commun; si $k'>k$, il faudra faire $p=0$.

Formons une seconde série de fonctions entières de z, en changeant dans les équations (1) les ζ en η et supposant $\eta=1$, $\eta'=0$; on aura

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \eta'' &= \lambda\eta - p\eta', \\ \eta''' &= \lambda'\eta' - p'\eta'', \\ \eta^{\text{iv}} &= \lambda''\eta'' - p''\eta''', \\ \eta^{\text{v}} &= \lambda'''\eta''' - p^{\text{iv}}\eta^{\text{v}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta^{(m)} &= \lambda^{(m-2)}\eta^{(m-2)} - p^{(m-2)}\eta^{(m-1)}. \end{aligned}\right.$$

Il est évident que $\eta''=\lambda$, par conséquent η'' est d'ordre nul; que $\eta'''=-p'\lambda$, donc η''' est de même ordre que p', c'est-à-dire de l'ordre $k'-k''$; η^{iv} est de même ordre que $p''\eta'''$, c'est-à-dire de l'ordre

$$k''-k'''+k'-k''=k'-k'''.$$

On trouve de même que η^{v} est de l'ordre $k'-k^{\text{iv}}$, et ainsi de suite jusqu'à $\eta^{(m)}$ qui est de l'ordre $k'-k^{(m-1)}$.

Considérons cette troisième série de fonctions

$$\zeta-\zeta\eta,\quad \zeta'-\zeta\eta',\quad \zeta''-\zeta\eta'',\quad \zeta'''-\zeta\eta''',\ldots.$$

on a évidemment les relations

$$\begin{aligned} \zeta''-\zeta\eta'' &= \lambda(\zeta-\zeta\eta)-p(\zeta'-\zeta\eta'), \\ \zeta'''-\zeta\eta''' &= \lambda'(\zeta'-\zeta\eta')-p'(\zeta''-\zeta\eta''), \\ \zeta^{\text{iv}}-\zeta\eta^{\text{iv}} &= \lambda''(\zeta''-\zeta\eta'')-p''(\zeta'''-\zeta\eta^{\text{iv}}). \end{aligned}$$

Il est évident que

$$\zeta - \zeta\eta = 0, \quad \zeta' - \zeta\eta' = \zeta',$$

donc $\zeta'' - \zeta\eta''$ est divisible par ζ'; de même $\zeta''' - \zeta\eta'''$, $\zeta^{\text{IV}} - \zeta\eta^{\text{IV}}, \ldots$. Chacune de ces fonctions étant divisible par ζ', il s'ensuit que la racine de ζ' substituée dans ces fonctions les annule; donc la dernière fonction

$$\zeta^{(m)} - \zeta\eta^{(m)} = 1 - \zeta\eta^{(m)}$$

devient nulle en remplaçant z par une racine de $\zeta' = 0$; donc il en est de même de

$$\frac{Z}{\zeta}\left[1 - \zeta\eta^{(m)}\right] = \frac{Z}{\zeta} - Z\eta^{m}.$$

Ainsi la substitution de la valeur de z dans $\frac{z}{\zeta}$ donne le même résultat que si on la substitue dans la fonction entière $z\,\eta^{(\mu)}$; c'est ce qu'il fallait trouver.

II.

Nous avons vu que $Z\eta^{(m)}$ peut remplacer $\frac{Z}{\zeta}$; mais il suffit de prendre le résidu de la division de $Z\eta^{(\mu)}$ par ζ': à cet effet, posons les équations

$$\begin{aligned}
Z &= q'\ \zeta' + Z',\\
Z' &= q''\ \zeta'' + Z'',\\
Z'' &= q'''\ \zeta''' + Z''',\\
Z''' &= q^{\text{IV}}\zeta^{\text{IV}} + Z^{\text{IV}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Z^{(m-1)} &= q^{(m)}\,\zeta^{(m)} + Z^{(m)},
\end{aligned}$$

où

Z' est le résidu de la division de	Z	par ζ',
Z'' »	Z'	par ζ'',
Z''' »	Z''	par ζ''',
etc.		

Or Z' est d'un ordre inférieur à l'ordre de ζ' inférieur à k', Z'' est d'un ordre inférieur à celui de ζ'' inférieur à k''; et allant de suite, $Z^{(m)}$ est d'un ordre inférieur à $\zeta^{(m)}$, c'est-à-dire à 1. Donc

$$Z^{(m)} = 0;$$

ainsi

$$Z = q'\zeta' + q''\zeta'' + q'''\zeta''' + q^{\text{IV}}\zeta^{\text{IV}} + \ldots + q^{(\mu)}\eta^{(\mu)}.$$

En posant

$$\zeta' = 0,$$

on a

$$\zeta'' = \zeta\eta'', \quad \zeta''' = \zeta\eta''', \ldots, \quad \zeta^{\text{IV}} = \zeta\eta^{\text{IV}}$$

(voir ci-dessus); donc, avec la même condition,

$$\zeta' = 0,$$

on a

$$\frac{Z}{\zeta} = q''\eta'' + q'''\eta''' + q^{\text{IV}}\eta^{\text{IV}} + \ldots + q^{(m)}\eta^{(m)}.$$

Or z' est d'un ordre inférieur à k' : $q''\zeta''$ est donc aussi d'un ordre inférieur à k'; mais ζ'' est d'ordre k'': q'' est donc d'un ordre inférieur à $k'-k''$; mais η'' est d'ordre nul: donc $q''\eta''$ est d'ordre inférieur à k', z'' est d'ordre inférieur à k'', et de même $q'''\zeta'''$; mais ζ''' est d'ordre k''': donc q''' est d'ordre inférieur à $k''-k'''$; η''' est d'ordre $k'-k''$: donc $q'''\eta'''$ est d'ordre inférieur à $k'-k'''$, et on démontre de même que tous les termes sont d'un ordre inférieur à k'.

Si l'équation

$$\zeta' = 0$$

a des racines rationnelles, il est plus facile de substituer immédiatement ces valeurs dans $\frac{Z}{\zeta}$ et de débarrasser ζ'

de ces racines; le degré de la fonction équivalente sera *moindre* alors que si on laisse subsister ces racines rationnelles.

III. *Applications.*

$$Z = z^6 - \frac{50}{39}z^4 + \frac{283}{715}z^2 - \frac{256}{15015},$$

$$\zeta = 7z^6 - \frac{105}{13}z^4 + \frac{315}{143}z^2 - \frac{35}{429},$$

$$\zeta' = z^7 - \frac{21}{13}z^5 + \frac{105}{143}z^3 - \frac{35}{429}z.$$

Posant

$$\zeta' = 0,$$

on a

$$z = 0$$

et

$$\frac{Z}{\zeta} = \frac{256}{1225}.$$

Divisant par z, on a

$$\zeta' = z^6 - \frac{21}{13}z^4 + \frac{105}{143}z^2 - \frac{35}{429},$$

$\frac{\zeta}{\zeta'}$ donne pour quotient 7 et pour résidu

$$\frac{42}{13}\left(z^4 - \frac{10}{11}z^2 + \frac{5}{33}\right);$$

donc

$$z^4 - \frac{10}{11}z^2 + \frac{5}{11} = \frac{13}{42}\zeta - \frac{13}{6}\zeta',$$

ainsi

$$\zeta'' = z^4 - \frac{10}{11}x^2 + \frac{5}{33},$$

$$\lambda = \frac{13}{42}, \quad p = +\frac{13}{6};$$

et, continuant de même, on trouve

$$\zeta''' = z^2 - \frac{3}{7}, \quad \lambda' = -\frac{4719}{280},$$

$$\zeta^{\text{IV}} = 1, \qquad \lambda'' = -\frac{147}{8},$$

$$p' = -\frac{4719}{280} z^2 + \frac{3333}{286},$$

$$p'' = -\frac{147}{8} z^2 + \frac{777}{88},$$

$$\eta = 1, \quad \eta' = 0, \quad \eta'' = \frac{13}{42}, \quad \eta''' = \frac{20449}{3920} z^2 - \frac{14443}{3920},$$

$$\eta^{\text{IV}} = \frac{61347}{640} z^4 - \frac{127413}{1120} z^2 + \frac{120263}{4486};$$

$$Z = z^6 - \frac{50}{39} z^4 + \frac{283}{715} z^2 - \frac{256}{15015}, \quad q' = 1,$$

$$Z' = \frac{1}{3} z^4 - \frac{22}{65} z^2 + \frac{323}{5005}, \qquad q'' = \frac{1}{3},$$

$$Z'' = -\frac{76}{2145} z^2 + \frac{632}{45045}, \qquad q''' = -\frac{76}{2145},$$

$$Z''' = -\frac{4}{3465}, \qquad q^{\text{IV}} = -\frac{4}{3405};$$

de là, on dérive la fonction entière equivalente à la fonction fractionnaire, savoir :

$$-\frac{1859}{16800} z^4 - \frac{1573}{29400} z^2 + \frac{7947}{39200}.$$

M. Koralek, le célèbre calculateur, a ainsi achevé le calcul; regardant z^2 comme l'inconnue, les trois racines de l'équation

$$z^6 - \frac{21}{13} z^4 + \frac{105}{143} z^2 - \frac{35}{459} = 0$$

sont

$$z_1^2 = 0,549\,664\,41,$$
$$z_2^2 = 0,900\,912\,54,$$
$$z_3^2 = 0,164\,807\,68;$$

ces valeurs, étant substituées dans l'expression

$$\frac{1859}{1680} z^4 - \frac{1573}{29400} z^2 + \frac{7947}{39200},$$

donnent respectivement ces résultats :

$$-0,042\,568\,17,$$
$$-0,011\,774\,11,$$
$$-0,008\,449\,63.$$

Note. On voit qu'il est bien moins pénible de calculer sur une fonction entière que sur une fraction rompue. Soient P, Q, R trois fonctions entières de z et supposons que l'on ait

$$Py + Q = 0, \quad R = 0;$$

éliminant z, on obtient une équation en y. Cette méthode nous apprend qu'on peut parvenir à cette équation en y en éliminant z entre $y = S$ et $R = 0$, S étant une fonction entière de z qu'on peut déterminer. Cela revient géométriquement à remplacer une courbe hyperbolique par une courbe parabolique. Tm.

SUR LA QUESTION 330

(voir p. 230, 305).

Le théorème est démontré dans l'*Algèbre supérieure*, 1re édit., p. 206, et est une conséquence immédiate des formules données par Stainville (*Annales* de Gergonne, t. IX, p. 201). (A. Genocchi.)

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICIEL.

I.

Discussion d'une équation numérique du second degré à trois variables.

Nous supposerons que les trois équations du premier degré

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0,$$

qui déterminent les coordonnées du centre, aient une solution *finie* et une seule; en prenant pour origine le point déterminé par cette solution, l'équation à discuter aura la forme

$$(1)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0,$$

et la valeur du polynôme

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2$$

sera différente de zéro (*).

Nous admettrons de plus que le terme indépendant F n'est pas nul.

(*) Ce polynôme est, comme on sait, le dénominateur commun des valeurs qu'on obtient en résolvant les équations

$$\frac{1}{2}f'_x = 0, \quad \frac{1}{2}f'_y = 0, \quad \frac{1}{2}f'_z = 0.$$

On le nomme le *déterminant* des fonctions linéaires $\frac{1}{2}f'_x$, $\frac{1}{2}f'_y$, $\frac{1}{2}f'_z$, ou bien encore l'*invariant* de la fonction homogène du second degré

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy.$$

Nous le désignerons par la lettre D.

1. En faisant successivement

$$z=0,\quad y=0,\quad x=0$$

dans l'équation (1), on aura les sections de la surface par les plans des coordonnées. Si parmi ces trois sections on trouve deux lignes *réelles* d'espèces différentes, la surface sera un hyperboloïde à une nappe. Car, en coupant un hyperboloïde à deux nappes, ou un ellipsoïde par des plans qui contiennent le centre de la surface, on n'obtient jamais des lignes réelles d'espèces différentes.

Si parmi les trois sections dont il s'agit, on trouve une ligne *réelle* et une ligne *imaginaire*, la surface sera un hyperboloïde à deux nappes. Car, la surface sera réelle, et la seule surface réelle du second degré, à centre unique, qui puisse être coupée suivant une ligne imaginaire par un plan contenant le centre, est l'hyperboloïde à deux nappes.

D'après cela, on voit qu'il n'y a lieu à discussion qu'autant que les trois sections sont de même nature.

2. Elles peuvent être, toutes trois, du genre parabolique.

On aura alors

$$B''^2-AA'=0,\quad B'^2-AA''=0,\quad B^2-A'A''=0.$$

Aucun des coefficients A, A', A'' ne sera nul; car, si l'on avait, par exemple, $A=0$, il en résulterait

$$B'=0,\quad B''=0,$$

et l'équation (1) se réduisant à

$$A'y^2+A''z^2+2Byz+F=0,$$

ne contiendrait que deux variables, ce qui ne peut avoir lieu quand la surface a un centre unique. Les relations

$$B''^2-AA'=0,\quad B'^2-AA''=0,$$

montrent, de plus, que les trois coefficients A, A', A'' doivent avoir le même signe.

Suivant que le signe commun à A, A', A'' *sera différent de celui du terme indépendant* F *ou le même que celui de* F, *la surface sera un hyperboloïde à une nappe ou un hyperboloïde à deux nappes.*

En effet, dans le premier cas, les sections par les plans des coordonnées étant chacune formées de deux droites réelles, il est clair que la surface est un hyperboloïde à une nappe. Et de là on peut conclure que, dans l'autre cas, la surface est nécessairement un hyperboloïde à deux nappes. C'est ce que nous allons faire voir.

En admettant pour plus de précision que A, A', A'' soient positifs, le terme indépendant F sera négatif quand les sections seront formées de droites réelles, et l'équation proposée aura la forme

$$(2)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = K^2.$$

Comme elle représente alors un hyperboloïde à une nappe, en prenant pour axes des x et des y les deux axes réels de l'hyperboloïde et pour axe des z l'axe imaginaire, on réduira l'équation précédente à

$$px^2 + p'y^2 - p''z^2 = K^2,$$

le terme indépendant ne sera pas changé puisqu'on a conservé la même origine. Quand F est positif, l'équation proposée devient

$$(3)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = -K^2;$$

et la même transformation de coordonnées qui réduit l'équation (2) à

$$px^2 + p'y^2 - p''z^2 = K^2,$$

donnera pour (3) l'équation

$$px^2 + p'y^2 - p''z^2 = -K^2,$$

qui représente évidemment un hyperboloïde à deux nappes (*).

3. Les trois sections par les plans des coordonnées peuvent être du genre elliptique. Dans ce cas, on a les inégalités

$$B''^2 - AA' < 0, \quad B'^2 - AA'' < 0, \quad B^2 - A'A'' < 0.$$

Les trois coefficients A, A′, A″ sont différents de zéro et ils ont le même signe. Quand le signe commun à A, A′, A″ sera le même que celui du terme indépendant F, les trois ellipses seront imaginaires, et elles seront, au contraire, réelles si le signe de A, A′, A″ est différent de celui de F. Dans le premier cas, la surface ne peut être qu'un hyperboloïde à deux nappes ou une surface imaginaire. Dans le second, elle sera un ellipsoïde ou un hyperboloïde à une nappe.

Nous allons discuter l'équation proposée dans chacune de ces deux hypothèses.

1°. *Si les sections sont des ellipses imaginaires, l'équation représentera un hyperboloïde à deux nappes ou une surface imaginaire suivant que l'*invariant

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2$$

(*) En général, si, $f(x, y, z)$ étant une fonction homogène du second degré, l'équation

$$f(x, y, z) + h = 0$$

représente un hyperboloïde à une nappe, l'équation

$$f(x, y, z) - h = 0$$

représentera un hyperboloïde à deux nappes. Car la première pourra être ramenée à la forme

$$px^2 + p'y^2 - p''z^2 = K^2;$$

et, par la même transformation de coordonnées, la seconde deviendra

$$px^2 + p'y^2 - p''z^2 = -K^2.$$

aura un signe différent de celui du terme indépendant F, *ou le même signe que* F.

Démonstration. Les quantités A, $B''^2 - AA'$ étant différentes de zéro, le polynôme homogène

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy$$

pourra être transformé en cette somme algébrique de carrés

$$\frac{(Ax + B''y + B'z)^2}{A} + \frac{[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2}{A(AA' - B''^2)} + \frac{Dz^2}{AA' - B''^2} \ (*).$$

et, par suite, l'équation proposée deviendra

$$(4) \left\{ \frac{(Ax + B''y + B'z)^2}{A} + \frac{[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2}{A(AA' - B''^2)} + \frac{Dz^2}{AA' - B''^2} + F = 0. \right.$$

Or, les coefficients A, F sont supposés de même signe; d'ailleurs, la différence $AA' - B''^2$ est positive, donc les trois termes

$$\frac{(Ax + B''y + B'z)^2}{A}, \quad \frac{[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2}{A(AA' - B''^2)}, \quad F,$$

sont à la fois ou positifs ou négatifs. Cela posé, si l'invariant D a un signe contraire à celui de F, la surface représentée par l'équation (4) ne peut être imaginaire puisque l'intersection de cette surface par le plan

$$Ax + B''y + B'z = 0$$

(*) La transformation dont il s'agit ici n'offre qu'une application particulière d'une théorie très-remarquable qui est due à M. Hermite. Les propositions élémentaires de cette théorie ont été exposées dans la dernière édition du *Programme* que j'ai publié avec M. Roguet

est une hyperbole dont la projection sur le plan des yz a pour équation

$$\frac{[(AA'-B''^2)y+(AB-B'B'')z]^2}{A(AA'-B''^2)}+\frac{Dz^2}{AA'-B''^2}+F=0.$$

Par conséquent, cette surface est un hyperboloïde à deux nappes.

Quand l'invariant D a le même signe que le terme indépendant F, l'équation (4) n'admet aucune solution réelle, parce que le premier membre est la somme de quatre carrés précédés du même signe, et dont l'un est indépendant des variables.

2°. *Lorsque les sections sont des ellipses réelles, l'équation proposée représente un ellipsoïde ou un hyperboloïde à une nappe suivant que l'invariant*

$$AA'A''+2BB'B''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2$$

a un signe contraire à celui du terme indépendant F, *ou le même signe que ce terme.*

Démonstration. On peut, comme précédemment, mettre l'équation proposée sous la forme

$$(4)\left\{\begin{aligned}&\frac{(Ax+B''y+B'z)^2}{A}+\frac{[(AA'-B''^2)y+(AB-B'B'')z]^2}{A(AA'-B''^2)}\\&\qquad+\frac{Dz^2}{AA'-B''^2}+F=0.\end{aligned}\right.$$

Mais A et F ont maintenant des signes contraires, parce que les ellipses qui résultent des intersections de la surface par les plans des coordonnées sont supposées réelles. De plus, $AA'-B''^2$ est une quantité positive; il s'ensuit que si l'invariant D et le terme indépendant F n'ont pas le même signe, les trois carrés $\frac{(Ax+B''y+B'z)^2}{A}$,

$\frac{[(AA'-B''^2)y+(AB-B'B'')z]^2}{A(AA'-B''^2)}$, $\frac{Dz^2}{AA'-B''^2}$ auront leurs coefficients positifs quand F sera négatif, et inversement; on en conclura que l'équation (4) représente alors une surface limitée qui ne peut être qu'un ellipsoïde (*).

Lorsque D et F ont le même signe, deux des carrés qui composent le premier membre de l'équation (4) sont précédés du signe + et les deux autres du signe —. Il est, par cela même, évident que la surface admet des génératrices rectilignes; par conséquent, cette surface est un hyperboloïde à une nappe. C'est ce qu'il fallait démontrer.

4. Supposons actuellement que les sections par les plans des coordonnées soient des hyperboles.

On aura

$$B''^2 - AA' > 0, \quad B'^2 - AA'' > 0, \quad B^2 - A'A'' > 0;$$

les coefficients A, A', A'' pourront être positifs, négatifs ou nuls. Nous allons faire voir que, dans tous les cas, *la surface sera un hyperboloïde à une nappe ou à deux nappes suivant que l'invariant* D *et le terme indépendant* F *auront le même signe ou des signes contraires.*

En admettant d'abord que les carrés des trois variables ne manquent pas à la fois, l'un des trois coefficients A, A', A'', par exemple A, ne sera pas nul, on pourra alors

(*) En prenant pour plans de coordonnées les trois plans déterminés par les équations

$$Ax + B''y + B'z = 0,$$

$$(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z = 0, \quad z = 0,$$

l'équation de la surface prendra la forme

$$K^2x^2 + K'^2y^2 + K''^2z^2 = h^2,$$

et sous cette forme on reconnaît immédiatement qu'elle appartient à un ellipsoïde.

donner à l'équation proposée la forme

$$(4)\left\{\begin{aligned}&\frac{(Ax+B''y+B'z)^2}{A}+\frac{[(AA'-B''^2)y+(AB-B'B'')z]^2}{A(AA'-B''^2)}\\&\qquad+\frac{Dz^2}{(AA'-B''^2)}+F=0.\end{aligned}\right.$$

La différence $AA'-B''^2$ étant ici négative, on voit que les coefficients $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A(AA'-B''^2)}$ des deux premiers carrés ont des signes contraires, et qu'il en est de même des deux derniers termes $\frac{Dz^2}{AA'-B''^2}$ et F, quand D et F ont le même signe. Dans ce cas, en faisant passer ces deux derniers termes dans le second membre de l'équation, chacun des deux membres deviendra une différence de deux carrés, d'où il faut conclure que la surface représentée par l'équation proposée, admettant des génératrices rectilignes, est un hyperboloïde à une nappe.

Lorsque D et F ont des signes contraires, les deux termes $\frac{Dz^2}{AA'-B''^2}$ et F ont le même signe; alors, deux des trois carrés

$$\frac{(Ax+B''y+B'z)^2}{A},\quad \frac{[(AA'-B''^2)y+(AB-B'B'')z]^2}{A(AA'-B''^2)},\quad \frac{Dz^2}{AA'-B''^2},$$

seront affectés du même signe que F, et si l'on égale à zéro le troisième carré, on aura l'équation d'un plan passant par le centre de la surface et dont l'intersection avec la surface sera une ligne imaginaire (*); par consé-

(*) Supposez que le terme qui a un signe contraire à celui de F soit, par exemple, le premier terme $\frac{(Ax+B''y+B'x)^2}{A}$. Les coordonnées des

quent, l'équation proposée représentera un hyperboloïde à deux nappes.

Quand on a, à la fois,

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0,$$

l'équation proposée devient

(5) $$2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0,$$

et l'invariant

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2$$

se réduit à $2BB'B''$. Aucun des trois coefficients B, B', B'' ne peut être nul.

Il est facile de reconnaître que la surface est un hyperboloïde à une nappe ou à deux nappes, suivant que le produit $BB'B''$ a le même signe que F, ou un signe différent de celui de F.

On voit d'abord que cette surface est indéfinie dans tous les sens, puisqu'en donnant à deux des variables des

---

points communs à la surface et au plan diamétral

$$Ax + B''y + B'x = 0$$

devront vérifier l'équation

$$\frac{[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2}{A(AA' - B''^2)} + \frac{Dz^2}{(AA' - B''^2)} + F = 0.$$

Or, cette équation n'admet aucune solution réelle, puisque le premier membre est la somme de trois carrés précédés du même signe, et que l'un de ces carrés est indépendant des variables.

Au reste, en prenant pour plans de coordonnées les trois plans

$$Ax + B''y + B'x = 0,$$

$$(AB' - B''^2)y + (AB - B'B'')z = 0. \quad z = 0,$$

l'équation deviendra

$$K^2x^2 - k'^2y^2 - k''^2z^2 = h^2,$$

et il est alors évident qu'elle se rapporte à un hyperboloïde à deux nappes.

valeurs quelconques, la valeur correspondante de la troisième variable est constamment réelle. D'ailleurs la surface a un centre unique et n'est pas un cône, donc elle ne peut être que l'un des deux hyperboloïdes.

Pour savoir quel est celui des deux hyperboloïdes que l'équation (5) représente, il suffit de remarquer que pour les points communs à la surface et au plan

$$By + B'x = 0$$

mené par le centre, on a

$$By + B'x = 0 \quad \text{et} \quad 2B''xy + F = 0;$$

d'où

$$x = \pm B\sqrt{\frac{F}{2BB'B''}}.$$

Or, si le produit $BB'B''$ a le même signe que F, l'équation

$$x = \pm B\sqrt{\frac{F}{2BB'B''}}$$

détermine deux droites parallèles qui appartiennent à la surface considérée, et, par conséquent, l'équation (5) représente un hyperboloïde à une nappe. Si $BB'B''$ et F ont des signes différents, l'intersection de la surface et du plan central $By + B'x = 0$ est imaginaire, donc l'équation (5) se rapporte à un hyperboloïde à deux nappes.

5. De tout ce qui précède, nous concluons que pour reconnaître de quel genre est la surface représentée par l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0,$$

il suffit de déterminer les signes des différences

$$B^2 - A'A'', \quad B'^2 - AA'', \quad B''^2 - AA'$$

et de l'invariant

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B'''^2$$

du polynôme homogène

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy,$$

ce qui n'exige aucune transformation de l'équation proposée.

Il est d'ailleurs facile d'exprimer les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation proposée

$$(1) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0$$

représente une surface d'un genre déterminé.

Si l'on veut, par exemple, que la surface soit un ellipsoïde, il faudra que la section faite par l'un des trois plans coordonnés soit une ellipse *réelle*, et de plus la surface devra être limitée. Ces conditions seront suffisantes.

En prenant pour plan sécant le plan des xy, les équations de la section seront

$$z = 0, \quad Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + F = 0,$$

et on exprimera que cette section est une ellipse réelle en posant

$$B''^2 - AA' < 0, \quad AF < 0.$$

Si l'on suppose le terme indépendant F négatif, ce qui est permis, les deux premières conditions deviendront

$$B''^2 - AA' < 0, \quad A > 0.$$

De plus, pour que la surface soit limitée, il faut et suffit qu'on ait

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 > 0 \quad (\text{n}^\circ\, 5,\ 2^\circ),$$

donc, en admettant que le terme indépendant F soit né-

gatif, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0$$

représente une ellipse, consistent dans les trois inégalités :

$$A > 0,$$
$$AA' - B''^2 > 0,$$
$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 > 0.$$

Remarque. Une méthode différente de celle que nous avons suivie a conduit aux conditions

$$A + A' + A'' > 0,$$
$$AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2 > 0,$$
$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 > 0\ (*).$$

On peut effectivement déduire ces dernières inégalités de celles que nous venons de trouver.

Car, en posant

$$D = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2,$$

on a

$$D = \frac{(AA' - B''^2)(AA'' - B'^2) - (AB - B'B'')^2}{A}$$

(*) Quand les coordonnées sont rectangulaires, la détermination des plans principaux et des axes des surfaces du second degré dépend de la résolution de l'équation du troisième degré

$$S^3 - (A + A' + A'')S^2 + (AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2)S$$
$$- (AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2) = 0.$$

On a démontré que le premier membre de cette équation doit offrir trois variations de signes lorsque l'équation du second degré

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''xy + F = 0,$$

représente un ellipsoïde, en admettant que F soit négatif. On a donc les trois conditions

$$A + A' + A'' > 0,$$
$$AA' + AA' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2 > 0,$$
$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 > 0,$$

et, par conséquent, les inégalités supposées

$$A > 0, \quad AA' - B''^2 > 0, \quad D > 0$$

donnent

$$AA'' - B'^2 > 0,$$

et, par suite,

$$A'' > 0.$$

On a aussi

$$D = \frac{(AA'' - B'^2)(A'A'' - B^2) - (A''B'' - BB')^2}{A''},$$

d'où

$$A'A'' - B^2 > 0, \quad A' > 0.$$

En additionnant les trois inégalités

$$A > 0, \quad A' > 0, \quad A'' > 0,$$

il vient

$$A + A' + A'' > 0.$$

De même, l'addition des trois inégalités

$$AA' - B''^2 > 0, \quad AA'' - B'^2 > 0, \quad A'A'' - B^2 > 0$$

donne

$$AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2 > 0.$$

C'est ce qu'il fallait trouver.

6. Nous avons jusqu'à présent admis que l'équation proposée contenait un terme indépendant des variables; lorsqu'il en est autrement, cette équation se réduit à

$$(5) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0,$$

et elle ne peut représenter qu'une surface conique ou l'origine des coordonnées, en supposant toujours que l'invariant D ne soit pas nul.

Quand les trois différences $B''^2 - AA'$, $B'^2 - AA''$, $B^2 - A'A''$ ne sont pas à la fois négatives, on trouve au

moins une ligne réelle parmi les trois sections des plans coordonnés, et, par conséquent, l'équation proposée appartient à un cône.

La discussion se borne donc à l'examen du cas particulier où les trois différences dont il s'agit étant négatives, les sections par les plans coordonnés ne donnent qu'un seul point qui est l'origine.

On a déjà fait observer (nº 3) que dans ce cas le polynôme homogène

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy$$

peut être remplacé par

$$\frac{(Ax + B''y + B'z)^2}{A} + \frac{[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2}{A(AA' - B''^2)} + \frac{Dz^2}{AA' - B''^2};$$

il s'ensuit que l'équation proposée revient à

$$(6)\quad \frac{(Ax + B''y + B'z)^2}{A} + \frac{[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2}{A(AA' - B''^2)} + \frac{Dz^2}{AA' - B''^2} = 0.$$

Lorsque D et A auront le même signe, les coefficients $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A(AA' - B''^2)}$, $\frac{D}{AA' - B''^2}$ des trois carrés qui forment le premier membre de l'équation (6) seront à la fois ou positifs ou négatifs, et alors l'équation (6) n'admettant que la seule solution réelle $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, représentera l'origine des coordonnées.

Si D et A ont des signes contraires, les deux premiers coefficients $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A(AA' - B''^2)}$ seront positifs, et le troi-

sième $\frac{D}{AA' - B''^2}$ négatif ou inversement, et il est évident que l'équation admettra une infinité de solutions réelles, elle représentera donc un cône ayant son centre à l'origine (*).

D'après cela, on voit que les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0$$

représente un point sont exprimées par ces quatre inégalités

$$B''^2 - AA' < 0, \quad B'^2 - AA'' < 0, \quad B^2 - A'A'' < 0, \quad AD > 0.$$

G.

(*) Si, par exemple, D est négatif et A positif en prenant pour plans de coordonnées les trois plans

$$Ax + B''y + B'z = 0,$$
$$(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z = 0, \quad z = 0,$$

l'équation (6) se ramènera à la forme

$$K^2x^2 + K'^2y^2 - K''^2z^2 = 0,$$

d'où

$$K^2x^2 = (K''z + K'y)(K''z - K'y):$$

la surface représentée est évidemment un cône dont les génératrices ont pour équations

$$Kx = \lambda(K''z + K'y),$$
$$Kx = \frac{1}{\lambda}(K''z - K'y).$$

SUR LA DIVISION DU CERCLE ET SON APPLICATION A LA THÉORIE DES NOMBRES;

Par JACOBI.

(Extrait des *Comptes rendus* mensuels de l'Académie des Sciences de Berlin pour l'année 1837.)

(TRADUIT PAR M. E. LAGUERRE-WERLY.)

Soient p un nombre premier, x une racine de l'équation

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0,$$

et g une racine primitive de p. Posons en outre

$$F(\alpha) = x + \alpha x^g + \alpha^2 x^{g^2} + \ldots + \alpha^{p-2} x^{p^{g-2}},$$

α désignant une racine de l'équation

$$\frac{\alpha^{p-1} - 1}{\alpha - 1} = 0.$$

On aura

$$F(\alpha) F(\alpha^{-1}) = \alpha^{\frac{p-1}{2}} . p;$$

et si l'on pose

$$F(\alpha^m) F(\alpha^n) = \psi(\alpha) F(\alpha^{m+n}),$$

l'expression $\psi(\alpha)$ sera une fonction entière de α dont les coefficients seront des nombres entiers; on aura de plus

$$\psi(\alpha)\psi(\alpha^{-1}) = p \ (*).$$

(*) On doit excepter le cas où une ou plusieurs des quantités α^m, α^n, α^{m+n} se réduiraient à l'unité.

Désignons par r une racine primitive de l'équation

$$r^{p-1} - 1 = 0,$$

et dans l'expression

$$\psi(r) = \frac{F(r^{-m}).F(r^{-n})}{F(r^{-m-n})}$$

remplaçons la quantité r par le nombre g; il viendra, si m et n sont des nombres positifs plus petits que $p-1$,

$$\psi(g) \equiv - \frac{\Pi(m+n)}{\Pi(m)\Pi(n)} \pmod{p},$$

équation dans laquelle

$$\Pi(n) = 1.2.3\ldots n.$$

Mais si $m+n$ est plus grand que $p-1$, on aura

$$\psi(g) \equiv 0 \pmod{p};$$

cette dernière proposition constitue dans les applications un des théorèmes les plus féconds de la théorie des nombres.

Le cas de $m+n = p-1$ doit être excepté. Il y a plus de dix ans que j'ai communiqué ces théorèmes à Gauss. Je ferai encore remarquer que si l'on pose

$$2 \equiv g^{m}, \quad 3 \equiv g^{m'} \pmod{p},$$

on obtient ces deux formules remarquables:

(1) $$F(-1)F(\alpha^2) = \alpha^{2m} F(\alpha) F(-\alpha),$$

(2) $$F(\alpha) F(\gamma\alpha) F(\gamma^2\alpha) = \alpha^{-3m'} p F(\alpha^3).$$

Dans la dernière formule, γ désigne une racine cubique de l'unité. Si λ est un facteur impair de $p-1$, la première de ces deux formules permet de déterminer les fonctions $F(\alpha)$, dans lesquelles α désigne une racine $2\lambda^{ième}$ de l'u-

nité, au moyen de celles où α désigne une racine $\lambda^{ième}$ de l'unité. On obtient aussi pour $F(-\gamma)$ l'expression

$$F(-\gamma) = \sqrt{p}\sqrt[3]{\gamma^{-B}\frac{A - B\sqrt{-3}}{A + B\sqrt{-3}}},$$

équation dans laquelle

$$A^2 + 3B^2 = p.$$

A l'aide des deux mêmes formules, on trouve que si α est une racine primitive 8e de l'unité et si l'on a

$$p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2,$$
$$a \equiv c \equiv -1 \pmod{4},$$

on aura

$$F(\alpha) = \sqrt{(-1)^{\frac{c+1}{4}}\left(c + d\sqrt{-2}\right)\sqrt{\left(a + b\sqrt{-1}\right)\sqrt{p}}},$$

et de plus

$$F(\alpha)F(\alpha^2) = (-1)^{\frac{c+1}{4}+\frac{p-1}{8}}\left(a + b\sqrt{-1}\right)F(a^3),$$

$$F(\alpha)F(\alpha^3) = (-1)^{\frac{p-1}{8}}\left(c + d\sqrt{-1}\right)F(-1).$$

On obtient encore la formule suivante où γ et α désignent respectivement des racines imaginaires de l'unité du troisième et du quatrième degré,

$$F(\gamma\alpha) = \frac{F(\alpha)F(\gamma)}{a' + b'\alpha} = \frac{\sqrt{(a + b\alpha)\sqrt{p}}\sqrt[3]{\frac{L + M\sqrt{-3}}{2}\cdot\sqrt{p}}}{a' + b'\alpha},$$

formule dans laquelle

$$p = a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 = \frac{L^2 + 3M^2}{4},$$
$$a \equiv -1 \pmod{4}, \quad a' \equiv -L \equiv -1 \pmod{3},$$
$$M \equiv 0 \pmod{3}, \quad \frac{a'}{b'} \equiv \frac{a}{b} \pmod{p}.$$

Les signes douteux et les valeurs des radicaux seront toujours déterminés par des congruences, ou, s'ils dépendent du choix de la racine primitive g, cette dépendance sera indiquée d'une manière simple. La loi de cette dépendance est le principe le plus fécond dans l'application à la théorie des résidus des puissances. Je ferai encore remarquer que si

$$p = c^2 + 2d^2$$

est de la forme $8n + 1$, C est le résidu minimum par rapport au module p du nombre

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{p+1}{2}\right)\left(\frac{p+3}{2}\right)\cdots\frac{5(p-1)}{8}}{1.2\ldots\frac{p-1}{8}},$$

et qu'il est toujours positif ou négatif suivant que, abstraction faite du signe, il est de la forme $4n + 3$ ou de la forme $4n + 1$.

Les fonctions $F(\alpha)$, que l'on avait seulement déterminées dans les cas où α était ou une racine carrée ou une racine cubique ou une racine biquadratique de l'unité, sont maintenant déterminées par la formule ci-dessus lorsque α est une racine de l'unité soit du degré 6, soit du degré 8 ou bien encore du degré 12. On peut donc à priori résoudre complétement les équations du sixième, du huitième et du douzième degré qui se présentent dans la division du cercle; on n'a besoin pour cela que de la décomposition du nombre p en les trois formes $x^2 + y^2$, $x^2 + 2y^2$, $x^2 + 3y^2$. J'ai joint à mon travail le tableau de ces décompositions pour tous les nombres premiers compris depuis 5 jusqu'à 12,000.

La formule suivante est d'une grande importance dans l'application de la division du cercle à la théorie des nombres.

Soient p un nombre premier de la forme $n\lambda + 1$, β une racine primitive de l'unité du degré λ, α une racine quelconque de l'équation

$$\alpha^{p-1} = 1\ ;$$

soit de plus

$$\lambda \equiv g^m\ (\text{mod.}\ p)\ ;$$

on aura, si λ est impair,

$$F(\alpha)\,F(\beta\alpha)\,F(\beta^2\alpha)\ldots\,F(\beta^{\lambda-1}\alpha) = \alpha^{-\lambda m}\,p^{\frac{\lambda-1}{2}}\,F(\alpha^\lambda),$$

et si λ est pair,

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} F(\alpha)\,F(\beta\alpha)\ldots\,F(\beta^{\lambda-1}\alpha) \\ = (-1)^{\frac{(p-1)(\lambda-2)}{8}}\,p^{\frac{\lambda-2}{2}}\,F(-1)\,F(\alpha^\lambda)\ (*). \end{array}\right.$$

La quantité $F(-1)$ qui entre dans cette formule est toujours égale à

$$\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}\,p}.$$

Les fonctions ψ sont liées intimement avec les coefficients du binôme ou les intégrales eulériennes de première espèce, comme le montre la congruence

$$\psi(g) \equiv -\frac{\Pi(m+n)}{\Pi(m).\Pi(n)}\ (\text{mod.}\ p).$$

La comparaison de cette congruence avec la formule

$$\psi(r) = \frac{F(r^{-m}).F(r^{-n})}{F(r^{-m-n})}$$

montre qu'il doit exister entre les fonctions F et les inté-

(*) Ce théorème est analogue à un théorème de Gauss sur les intégrales eulériennes, théorème dont récemment Dirichlet a donné une remarquable démonstration. (*Jacobi.*)

grales eulériennes de deuxième espèce un semblable rapport, de telle sorte que $-\frac{1}{\pi(n)}$ corresponde à $F(r^{-n})$. J'ai longtemps cherché ce rapport, et je l'ai enfin trouvé dans le théorème suivant :

Remplaçons dans l'expression $F(\alpha)$ l'exposant g^m par son résidu positif g_m par rapport au module p, en sorte que

$$F(x, \alpha) = x + \alpha x^{g_1} + \alpha^2 x^{g_2} + \ldots + \alpha^{p-2} x^{g_{p-2}}.$$

Ne représentons plus par x et α des racines de l'unité; mais soient x une variable indéterminée et α un nombre congru à g^{-m} suivant le module p. Représentons en outre par Y_n l'expression que l'on obtient en développant

$$[\log(1+y)]^n,$$

et en supprimant dans ce développement les puissances de y supérieures à la $(p-1)^{ième}$.

On aura pour une valeur quelconque de α et la valeur de m correspondante,

$$F(1+y, \alpha) \equiv -\frac{Y_m}{\Pi_m} (\text{mod}. p),$$

congruence qui doit avoir lieu quel que soit y, et, par conséquent, doit être vérifiée isolément par les coefficients de chaque puissance de y. Telle est la relation cherchée; en multipliant ensemble deux fonctions F, on en déduit le rapport indiqué plus haut entre les fonctions ψ et les coefficients binomiaux. Je ferai encore remarquer que dans le développement de la $(2m)^{ième}$ puissance de $\log(1+y)$ si p est un nombre premier plus grand que $2m+1$, le coefficient de y^p réduit à sa plus simple expression contient toujours un multiple de p à son numérateur.

La vraie forme des racines de l'équation

$$x^p = 1,$$

forme que l'on n'a donnée nulle part jusqu'ici, est la suivante :

On peut, comme on sait, former facilement ces racines au moyen des fonctions $F(\alpha)$ et par de simples additions. Si λ est un facteur de $p-1$ et si

$$\alpha^\lambda = 1,$$

il est aussi connu que $[F(\alpha)]^\lambda$ n'est fonction que de α. Mais on n'a besoin de connaître que les valeurs de $F(\alpha)$, pour lesquelles λ est une puissance d'un nombre premier. Soit par exemple $\lambda\lambda'\lambda''$ un facteur de $p-1$; supposons que λ, λ', λ'' soient des puissances de nombres premiers différents et α, α', α'' des racines primitives de l'unité des degrés λ, λ', λ'', etc. ; on aura

$$F(\alpha\alpha'\alpha''\ldots) = \frac{F(\alpha)F(\alpha')F(\alpha'')\ldots}{\psi(\alpha, \alpha', \alpha''\ldots)},$$

$\psi(\alpha, \alpha', \alpha''\ldots)$ étant une fonction rationnelle de α, α', α'',..., à coefficients entiers. Si donc on regarde la racine $(p-1)^{ième}$ de l'unité comme connue, l'expression de x ne contiendra que des radicaux dont les exposants seront des puissances de nombres premiers, ou des produits de tels radicaux. Si

$$\lambda = \mu^n,$$

μ étant un nombre premier, on trouve les fonctions $F(\alpha)$ de la manière suivante. Posons

$$F(\alpha)F(\alpha^i) = \psi_i(\alpha)F(\alpha^{i+1}),$$

il viendra

$$F(\alpha) = \sqrt[\mu]{\psi_1(\alpha)\psi_2(\alpha)\ldots\psi_{\mu-1}(\alpha)F(\alpha^\mu)},$$

$$F(\alpha^\mu) = \sqrt[\mu]{\psi_1(\alpha^\mu)\psi_2(\alpha^\mu)\ldots\psi_{\mu-1}(\alpha^\mu)F(\alpha^{2\mu})},$$

. . . .

et enfin

$$F\left(\alpha^{\mu^{n-1}}\right)$$

$$= \sqrt[n]{\psi_1\left(\alpha^{\mu^{n-1}}\right)\psi_2\left(\alpha^{\mu^{n-1}}\right)\ldots\psi_{\mu-2}\left(\alpha^{\mu^{n-1}}\right)(-1)^{\frac{p-1}{\mu}}p}.$$

Les $\mu - 1$ fonctions ψ ne déterminent pas seulement toutes les quantités placées sous les signes radicaux, mais encore la dépendance mutuelle des valeurs des radicaux. Si l'on remplace α par ses différentes puissances, on peut, au moyen des valeurs ainsi obtenues, exprimer rationnellement $F(\alpha^i)$ par les puissances de $F(\alpha)$, puisque tous les $\mu^n - 1$ quotients $\frac{[F(\alpha)]^i}{F(\alpha)^i}$ s'expriment toujours par un produit de plusieurs des $\mu - 1$ fonctions $\psi(\alpha)$. C'est en cela que consiste un des plus grands avantages de la méthode proposée sur celle de Gauss; dans cette dernière méthode, la recherche de la dépendance des différentes valeurs des radicaux exige un travail tout spécial, d'une pratique très-pénible à cause de sa difficulté, même pour de petits nombres premiers; par l'introduction des fonctions ψ, on obtient, au contraire, en même temps, et les quantités placées sous les signes radicaux, et les relations qui lient entre elles les valeurs de ces radicaux. On forme les fonctions ψ par un algorithme très-simple; il exige seulement l'emploi d'une Table donnant les solutions des congruences de la forme

$$g^{m'} \equiv 1 + g^m \pmod{p}.$$

En suivant ces règles, un de mes auditeurs (*) a dans

(*) A cette occasion, le même géomètre (Rosenhain) a démontré ce remarquable théorème : Si α désigne une racine cubique et γ une racine cinquième de l'unité; si, de plus, p désigne un nombre de la forme $30n + 1$ et si l'on pose

$$24 \equiv g^m \pmod{p},$$

un Mémoire couronné par l'Académie de Berlin donné la résolution complète des équations de la forme $x^p = 1$ pour tous les nombres premiers jusqu'à 103.

Un des théorèmes les plus féconds dans la théorie des nombres est le suivant. Soient m, m', m'', etc., des nombres positifs et plus petits que $p-1$; désignons par m_i, m'_i, m''_i, les plus petits restes positifs que l'on obtient en divisant im, im', im'', etc., par $p-1$. Faisons de plus

$$m_i + m'_i + m''_i + \ldots = n_i(p-1) + s_i,$$

où s_i est positif et plus petit que $p-1$. Si r est le plus petit des nombres $n_1, n_2, \ldots, n_{p-1}$ et si l'on pose

$$F(r^{-m}).F(r^{-m'})\ldots = \chi(r)F(r^{-s}),$$

tous les coefficients de $\chi(r)$ seront des nombres entiers divisibles par p^r et non divisibles par une puissance plus élevée de p; si l'on pose en outre

$$\chi(r) = p^r \chi'(r),$$

on aura

$$\chi'(g) \equiv \pm \frac{\Pi(s)}{\Pi(m)\,\Pi(m')\,\Pi(m'')} \pmod{p}.$$

L'application de cette proposition donne des théorèmes particuliers, dont j'ai donné il y a longtemps dans le *Journal* de Crelle un spécimen concernant le nombre des formes quadratiques réduites des diviseurs de la forme

---

on aura

$$F(\alpha)F(-\gamma) = \alpha^m \frac{A + B\sqrt{-3}}{2} F(-\alpha\gamma),$$

équation où l'on a

$$A \equiv -2, \quad B \equiv 0 \pmod{5}$$

et

$$4p = A^2 + 3B^2.$$

(*Jacobi.*)

$y^2 + pz^2$, p étant un nombre premier de la forme $4n + 3$ (*). Quand j'aurai donné à ces théorèmes la généralité dont ils paraissent susceptibles, j'aurai l'honneur de les communiquer à l'Académie. Ils forment un lien entre les deux parties principales de la haute arithmétique, la division du cercle et la théorie des formes quadratiques.

J'ai fait l'application de la division du cercle à la théorie des résidus cubiques et biquadratiques, et l'ai employé

(*) Un théorème analogue a lieu pour les nombres premiers de la forme $4n + 1$; le nombre des résidus quadratiques compris entre o et $\frac{1}{4}p$ donne alors le nombre des formes. (*Jacobi.*)

Le théorème dont Jacobi fait ici mention est ainsi conçu: Tout diviseur quadratique de la forme

$$y^2 + pz^2$$

peut se mettre sous la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

ou

$$p = 4ac - b^2,$$

si b est impair, et

$$p = ac - \frac{b^2}{4},$$

si b est pair. On peut faire en sorte que b soit plus petit que a et c. Les formes ainsi obtenues sont alors des formes réduites, et le nombre des classes des diviseurs quadratiques est le même que celui de ces formes réduites. Choisissons ces formes réduites en sorte que, si n est pair, b soit impair et réciproquement. Soit N le nombre de ces formes, P la somme des résidus quadratiques de p, Q la somme des non-résidus, on aura

$$2N - 1 = \frac{Q - P}{A}.$$

On peut conclure de là que l'on a toujours

$$Q > P,$$

si

$$p = 4n + 3,$$

résultat aussi obtenu par M. Dirichlet dans son Mémoire sur les progressions arithmétiques. (*Note du Traducteur.*)

avec beaucoup de simplicité et de facilité à la démonstration du beau théorème donné par Gauss dans son deuxième Mémoire sur les résidus biquadratiques ; il n'en a pas fait connaître jusqu'à présent la démonstration, qu'il désigne comme un *mysterium maxime reconditum*, et il y était parvenu vraisemblablement par un chemin tout différent (*). La loi de réciprocité pour les résidus cubiques est de la plus grande simplicité, et la démonstration découle immédiatement des formules connues de la division du cercle.

Soient

$$\frac{L + M\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{L' + M'\sqrt{-3}}{2}$$

deux nombres complexes premiers (M et M' sont divisibles par 3 et peuvent être zéro) ; désignons par

$$\left[\frac{x + y\sqrt{-3}}{\frac{1}{2}(L + M\sqrt{-3})}\right]$$

celle des quantités

$$1, \quad \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2},$$

qui est congrue à la puissance

$$(x + y\sqrt{-3})^{\frac{\frac{1}{4}(L^2 + 3M^2) - 1}{3}}$$

suivant le module $L + M\sqrt{-3}$, on aura

$$\left(\frac{\frac{1}{2}(L' + M'\sqrt{-3})}{\frac{1}{2}(L + M\sqrt{-3})}\right) = \left(\frac{\frac{1}{2}(L + M\sqrt{-3})}{\frac{1}{2}(L' + M'\sqrt{-3})}\right).$$

(*) Ce théorème concerne la réciprocité biquadratique entre deux nombres premiers complexes $a + b\sqrt{-1}$ et $c + d\sqrt{-1}$. M. Dirichlet a démon-

Les démonstrations de ces théorèmes ont pu être communiquées sans difficulté à mes auditeurs dans mes leçons de l'hiver dernier (*).

Quand on cherche au moyen de la loi de réciprocité de Legendre à reconnaître si un nombre premier est résidu quadratique ou non-résidu d'un autre, on est obligé de décomposer en facteurs premiers chacun des restes obtenus et de traiter chacun d'eux en particulier. Gauss a apporté à la théorie des résidus quadratiques un perfectionnement essentiel en ramenant par un théorème spécial cette recherche au développement d'une fraction en fraction continue, sans qu'il soit nécessaire d'effectuer aucune décomposition en facteurs. J'ai complété de même la théorie des résidus cubiques et biquadratiques; c'était une généralisation qui s'offrait d'elle-même. Pour montrer en particulier en quoi consiste cette généralisation pour les résidus quadratiques, soit p un nombre impair quelconque égal à f, f', f'', etc., où f, f', f'', etc., sont des nombres premiers égaux ou différents; j'étends de la manière suivante le sens de la belle notation employée

---

tré le premier théorème de Gauss relatif à la réciprocité quadratique de ces nombres.

(*) Ces démonstrations, connues déjà des professeurs Dirichlet et Kummer, ont été récemment publiées par le Dr Eisenstein dans le XXVIIe volume du *Journal* de Crelle, page 289, et dans le XXVIIIe, page 53. La démonstration de la loi de réciprocité des résidus quadratiques donnés par le même géomètre à la page 41 du XXVIIIe volume est la même que celle que j'ai communiquée à Legendre en 1827, et qu'il a insérée dans la troisième édition de sa *Théorie des nombres*. Les théorèmes donnés ci-dessus sur les formes quadratiques font maintenant partie d'une grande théorie fondée par Dirichlet. (*Jacobi*, octobre 1845.)

La démonstration de la loi de réciprocité de Legendre dont parle ici Jacobi est aussi identique avec celle qu'a donnée M. Cauchy en 1829 dans le *Bulletin* de Férussac avant la publication de la troisième édition de la *Théorie des nombres*. M. Serret a introduit la démonstration de Jacobi dans la deuxième édition de son *Algèbre supérieure*.

(*Note du Traducteur.*)

par Legendre. Si x est un nombre premier, $\left(\frac{x}{p}\right)$ désigne le produit

$$\left(\frac{x}{f}\right)\left(\frac{x}{f'}\right)\left(\frac{x}{f''}\right)\cdots$$

Soient p et p' deux nombres impairs premiers entre eux dont un au moins soit positif ; on a, comme pour les nombres premiers,

$$\left(\frac{p'}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p'-1}{2}}\left(\frac{p}{p'}\right),$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Ces formules donnent la valeur de $\left(\frac{p'}{p}\right)$ au moyen du développement ordinaire de $\frac{p'}{p}$ en fraction continue par une règle simple et essentiellement différente de celle de Gauss. La détermination de $\left(\frac{p'}{p}\right)$ exige seulement que l'on recherche si p et p' sont réellement premiers entre eux comme on l'a supposé. Ceci s'applique aussi aux résidus biquadratiques et cubiques pour lesquels j'ai introduit une notation semblable. L'emploi du symbole général $\left(\frac{x}{p}\right)$ fournit dans la pratique de grandes facilités.

Quant aux résidus du huitième et du cinquième degré, qui exigent des principes tout à fait nouveaux, j'en ai déjà poussé l'étude assez avant ; aussitôt que j'aurai amené la loi de réciprocité qui les concerne à la perfection désirable, je les communiquerai à l'Académie. Une de mes premières applications de la division du cercle concerne la résolution du problème de Pell par les fonctions cir-

culaires (*). J'extrais d'un Cours rédigé sous mes yeux par le professeur au gymnase de Dantzig, Czawalina, d'après des leçons que j'ai faites il y a plusieurs années, les théorèmes suivants :

Soit p un nombre premier de la forme $4n+1$; désignons par a ses résidus quadratiques inférieurs à $\frac{1}{2}p$ et positifs, on aura

$$\sqrt{p(\sqrt{p}.y+x)} = 2^{\frac{p+1}{2}}\,\Pi \sin^2\frac{a\Pi}{p},$$

x et y étant des solutions de l'équation

$$x^2 - py^2 = -4,$$

et le signe Π désignant un produit s'étendant à toutes les valeurs de a. Soit q un nombre premier de la forme $8n+3$; désignons par a ses résidus quadratiques, il viendra

$$x + y\sqrt{q} = \sqrt{2}\,\Pi \sin\left(\frac{a\Pi}{q} + \frac{\Pi}{4}\right),$$

x et y étant des solutions de l'équation

$$x^2 - qy^2 = -2.$$

Soient q et q' deux nombres premiers de la forme $4n+3$; supposons en outre q résidu quadratique de q' ; désignons respectivement par a et a' les résidus quadratiques positifs de q et de q', on aura

$$+2^{\frac{q-1}{2}\cdot\frac{q'-1}{2}}\,\Pi \sin\left(\frac{a\Pi}{q} + \frac{a'\Pi}{q'}\right) = \sqrt{q}.x + \sqrt{q'}.y,$$

(*) Ce problème consiste dans la résolution de l'équation indéterminée

$$x^2 - Dy^2 = 1.$$

Euler (*Algèbre*, tome II) en attribue une solution à Pell.

(*Note du Traducteur.*)

x et y satisfaisant à l'équation

$$qx^2 - q'y^2 = 4.$$

Si x et y ne sont pas pairs, en cubant les équations

$$x^2 - py^2 = -4 \quad \text{et} \quad qx^2 - q'y^2 = 4,$$

on obtiendra la solution des équations

$$u^2 - pv^2 = -1,$$
$$qu^2 - q'v^2 = +1$$

Note du Traducteur (*). On peut consulter sur cette théorie les *Recherches arithmétiques* de Gauss, septième section; les Mémoires sur la théorie des nombres, publiés par M. Cauchy dans les *Mémoires de l'Institut*, tome X; différents articles du même géomètre dans les *Comptes rendus*, et le Mémoire de M. Kummer sur les nombres complexes (*Journal* de M. Liouville, tome XVI).

M. Lebesgue a donné dans le même journal des démonstrations de quelques-unes des propositions contenues dans le présent Mémoire de Jacobi. M. Cauchy a aussi publié dans le *Bulletin* de Férussac (septembre 1829) un résumé de ses recherches sur cette partie de la théorie des nombres; on y trouve notamment indiquée l'application à la théorie des résidus de tous les degrés. Ce résumé se termine ainsi :

« J'observerai, en finissant, qu'ayant donné à M. Ja- » cobi communication de mes formules, j'ai appris de » cet habile géomètre qu'il était parvenu de son côté, et » en s'appuyant sur les mêmes principes, à des résultats » du même genre. Il a donné quelques-uns de ses résul- » tats, mais sans indiquer la méthode qui les avait four- » nis, dans le tome II du *Journal* de Crelle. »

(*) Le Traducteur, profond investigateur en géométrie et en analyse, possède un esprit d'abstraction excessivement rare chez des jeunes gens. On ne saurait trop encourager les travaux de ces hommes d'avenir. TM

On peut encore consulter les *Recherches sur la théorie des nombres* publiées par M. Libri dans le tome IX du *Journal* de Crelle, et depuis réimprimées dans les *Mémoires de l'Institut*.

NOTE SUR L'AIRE DU TRIANGLE RECTILIGNE ET L'AIRE DU TRIANGLE SPHÉRIQUE COMPARÉES.

Les cercles inscrits dans le triangle rectiligne et dans le triangle sphérique divisent chacun les trois côtés en six segments égaux deux à deux; dans le triangle rectiligne, multipliant pour chaque cercle la somme des segments inégaux par le produit de ces segments, on obtient le carré de l'aire du triangle; dans le triangle sphérique, multipliant pour chaque cercle le sinus verse de la somme des trois segments inégaux par le produit des sinus verses de ces trois segments, on obtient un produit égal au carré du produit du sinus verse de l'excès sphérique par les sinus verses des trois côtés. TM.

Remarque. Le raisonnement qu'on lit dans la note de la page 279 n'est qu'une tautologie.

Si a et b sont premiers entre eux, $a+mb$, $a+(m+1)b$ seront aussi premiers entre eux. Si l'on prend $a+mb=a'$ pour premier terme et $a'+b'$ pour second terme, on voit que l'hypothèse est celle-ci : Dans toute progression arithmétique au delà d'un terme quelconque, on peut trouver un nombre premier. C'est dire que dans toute progression arithmétique où le premier terme et la raison sont premiers entre eux, il y a une infinité de nombres premiers. C'est précisément ce qu'il faut démontrer. Nous y reviendrons. (LEBESGUE.)

QUESTIONS.

341. Soient AB, $A'B'$, $A''B''$, etc., un système de forces en équilibre dans un plan. A, A', A'', etc., sont les points d'application; AB, $A'B'$, etc., représentent les intensités et les directions des forces; par un point quelconque M du plan soient menées aux droites AB, $A'B'$, $A''B''$, etc., des droites ME, ME', ME'', etc., sous un angle constant α: de telle sorte qu'en faisant tourner une de ces droites ME' autour de M jusqu'à ce qu'elle coïncide avec ME, alors $A'B'$ devienne parallèle à AB, etc.; la somme des produits $AB.EA + A'B'.E'A' + A''B''.E''A''$, etc., est constante quelle que soit la position du point M et la grandeur de l'angle α, et selon que cette somme est positive, nulle ou négative, l'équilibre est stable, permanent ou instable. (MÖBIUS.)

342. ABC est un triangle inscrit dans le triangle abc, A est sur bc, B sur ac, C sur ab; trois courbes sont données dans le même plan; AB touche une courbe en γ, AC touche la deuxième courbe en β, et BC la troisième courbe en α; on a, pour toute position du triangle ABC,

$$\frac{A\gamma . B\alpha . C\beta}{A\beta . B\gamma . C\alpha} = \frac{aC . bA . cB}{aB . bC . cA}$$

à démontrer par des considérations de statique.

(MÖBIUS.)

343. Si p et $4p+1$ sont deux nombres premiers absolus, 2 est racine primitive relativement au nombre $4p+1$. (TCHEBYCHEF.) (*)

(*) Énoncé par l'éminent arithmologue dans un ouvrage sur les congruences publié en langue russe à Saint-Pétersbourg. In-8 de 279 pages. 1848.

THEORÈME DE LEGENDRE ET DE M. P. SERRET SUR LE TRIANGLE SPHÉRIQUE,

Par M. Eugène ROUCHÉ,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

En rendant compte de l'excellent ouvrage de M. Paul Serret, M. Prouhet appelle l'attention sur le théorème suivant :

Si les côtés a, b, c *d'un triangle sphérique sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, on peut substituer à sa résolution celle d'un triangle rectiligne auxiliaire ayant pour l'un de ses côtés* a *et pour angles* A, B — E, C — E (2E *étant l'excès sphérique*); *et les deux autres côtés de ce triangle ne différeront des côtés correspondants du triangle sphérique que par des infiniment petits du second ordre.*

Cette proposition peut-elle, comme l'affirme l'auteur des *Méthodes en Géométrie,* « être employée aux *mêmes* usages que le théorème *analogue* de Legendre? »

Le théorème de M. Serret et celui de Legendre fournissent l'un et l'autre un triangle rectiligne qu'on peut, dans certains cas, substituer au triangle sphérique; voilà l'analogie. Mais Legendre ne néglige que les quantités du quatrième ordre, tandis que M. Serret néglige celles du second; voilà la différence : elle est assez essentielle pour que les deux théorèmes ne puissent pas se prêter aux mêmes usages.

Bien plus, lorsqu'on se borne au second ordre, le triangle de M. Serret est trop particulier.

Considérons, en effet, un triangle sphérique ABC

dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère.

Supposons d'abord que ce triangle soit rectangle en A, et construisons avec les éléments a, B, C un triangle rectiligne A′ B′ C′. Les différences

$$A - A', \quad b - b', \quad c - c'$$

sont du second ordre, car on a

1°. $$A - A' = \frac{\pi}{2} - (\pi - B - C) = 2E;$$

2°. $$\sin\frac{b}{R} = \sin\frac{a}{R}\sin B,$$

ou

$$\frac{b}{R}\left(1 - \frac{b^2}{6R^2}\right) = \frac{a}{R}\left(1 - \frac{a^2}{6R^2}\right)\sin B,$$

$$b = \frac{1 - \dfrac{a^2}{6R^2}}{1 - \dfrac{b^2}{6R^2}}\, a \sin B = b'\left(1 + \frac{b^2 - a^2}{6R^2}\right),$$

$b = b'$ au second ordre près;

3°. Même calcul pour $c - c'$.

Les éléments du triangle rectiligne A′ B′ C′ ne diffèrent donc qu'au second ordre des éléments correspondants du triangle sphérique rectangle ABC. Or, si dans le triangle rectiligne A′ B′C′ on laisse deux éléments fixes et qu'on fasse varier un troisième élément de quantités du second ordre, les autres éléments ne varieront que de quantités de cet ordre; on pourra donc se procurer une infinité de triangles rectilignes dont les éléments ne diffèrent qu'au second ordre de ceux du triangle sphérique rectangle ABC.

Prenons maintenant un triangle sphérique obliquangle ABC; menons la hauteur AD et formons deux triangles

rectangles adjacents $A'B'D'$, $A'C'D'$ composés des éléments

$$A'D' = AD, \quad A'B' = AB, \quad A'C' = AC,$$
$$B'A'D' = BAD, \quad C'A'D' = CAD.$$

L'angle $B'D'C'$ ne diffère de π qu'au second ordre, puisque, d'après le théorème précédent, chacun des angles en D' est égal à $\frac{\pi}{2}$, aux quantités du second ordre près. Donc $B'C'$ ne diffère de $B'D' + D'C'$ qu'au second ordre; et comme, d'après le théorème précédent, les côtés $B'D'$ et $D'C'$ sont égaux à BD et à DC, aux quantités du second ordre près, $B'C'$ ne diffère qu'au second ordre de BC.

D'ailleurs, les angles $C'B'D'$, $B'C'D'$ étant du second ordre, les angles $A'B'D'$, $A'C'D'$ sont égaux à B et à C, à des quantités du second ordre près.

Ainsi le triangle rectiligne $A'B'C'$ possède, aux quantités du second ordre près, les mêmes éléments que le triangle sphérique ABC. Il suffira donc de laisser fixes deux éléments de ce triangle rectiligne et de faire varier un troisième élément de quantités du second ordre, pour *obtenir une infinité de triangles rectilignes dont les éléments ne diffèrent qu'au second ordre des éléments correspondants du triangle sphérique* ABC.

GEOMÉTRIE DE L'ESPACE.

CONSIDÉRATIONS SUR LES COURBES A DOUBLE COURBURE.

1. Théorème I. *Si l'on connaît*

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)-(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{1.2.3}-1$$

groupes de trois valeurs qui satisfont en même temps à deux équations dont l'une s'élève au degré m *et l'autre au degré* n (m *n'est pas inférieur à* n), *on en déduira une infinité de pareils groupes sans avoir recours à ces équations* (Plucker, *Nouvelles Annales*, tome VII, page 266).

Théorème II. *Soit*

$$F_1=0,\quad F_2=0,\ldots,\quad F_n=0$$

un système de n *équations homogènes littérales entre les* n *inconnues* $x_1, x_2, \ldots x_n$; F_1 *est du degré* p_1, F_2 *du degré* p_2, F_n *du degré* p_n. *Faisons*

$$p_1p_2p_3\ldots p_n=P;$$

en éliminant les inconnues, on parvient à une équation homogène entre les coefficients. Les coefficients de F_1 *montent dans chaque terme au degré* $\frac{P}{p_1}$, *les coefficients de* F_2 *au degré* $\frac{P}{p_2}$, *etc., conséquemment le degré de l'équation est*

$$P\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n}\right)$$

(Cayley, *Nouvelles Annales*, tome XII, page 396).

Observation. Cette propriété a même lieu pour des équations non homogènes, car on les rendra telles en remplaçant x, y, z, etc., par $\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{z}{u}$, etc.; cela ne change pas les coefficients.

2. Une ligne algébrique est donnée par l'intersection de deux surfaces algébriques; le degré de la ligne est égal au produit des degrés des deux surfaces : ainsi une courbe n'est pas connue en énonçant seulement son degré, il faut encore énoncer les deux facteurs dont le produit donne ce degré. Représentons par S_m une surface de degré m; alors une courbe du vingt-quatrième degré peut résulter des intersections de ces couples de surfaces S_1 et S_{24}, S_2 et S_{12}, S_3 et S_8, S_4 et S_6, et le nombre de points qui déterminent cette courbe sera différent, selon qu'elle est le résultat de l'intersection de l'un ou de l'autre des quatre systèmes de couples.

3. Théorème III. *Une ligne de degré* mn *donnée par l'intersection des surfaces* S_m, S_n *est déterminée par un nombre de points donné par l'expression*

$$\frac{3mn(m-n+4)+(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

où m *n'est pas inférieur à* n.

Démonstration. S_m et S_n sont données respectivement par des équations de degré m et n entre les coordonnées x, y, z. Soit

$$N=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)-(m+1-n)(m+2-n)(m+3-n)-6}{6}.$$

Lorsque N groupes de valeurs simultanées de x, y, z satisfont aux deux équations, on en déduit une infinité

d'autres groupes y satisfaisant également (théorème I); ce qui veut dire géométriquement : si les surfaces S_m, S_n ont N points en commun, elles ont encore une infinité d'autres points en commun et la ligne d'intersection est déterminée; or l'expression N étant développée se réduit à la forme indiquée. Donc, etc.

Corollaire. Si $m = n$,

$$N = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 2.$$

4. *Exemples*. 1°. $n = 1$, la courbe est plane et l'on obtient

$$N = \frac{m(m+3)}{2}.$$

2°. $n = 2$,

$$N = m(m+2).$$

3°. $n = 3$,

$$N = \frac{3m(m+1)}{2}.$$

5. Prenons d'abord les lignes dont le degré n'est pas un nombre premier.

Soient

$$\begin{array}{llll} mn = 4, & n = 1, & m = 4, & N = 14, \\ & n = 2, & m = 2, & N = 8; \\ mn = 6, & n = 1, & m = 6, & N = 27, \\ & n = 2, & m = 3, & N = 15; \\ mn = 8, & n = 1, & m = 8, & N = 44, \\ & n = 2, & m = 4, & N = 24; \\ mn = 10, & n = 1, & m = 10, & N = 65, \\ & n = 2, & m = 5, & N = 35; \end{array}$$

$$mn = 12, \quad n = 1, \quad m = 12, \quad N = 90,$$
$$n = 2, \quad m = 6, \quad N = 48,$$
$$n = 3, \quad m = 4, \quad N = 24;$$

$$mn = 16, \quad n = 1, \quad m = 16, \quad N = 152,$$
$$n = 2, \quad m = 8, \quad N = 80,$$
$$n = 4, \quad m = 4, \quad N = 42.$$

6. Lorsque le degré de la ligne est un nombre premier p, il est évident que, lorsque cette ligne est sur une surface de degré p, elle est nécessairement plane, car

$$mn = p,$$

on a nécessairement

$$m = p, \quad n = 1;$$

mais cette ligne devient gauche pour l'intersection de deux surfaces réglées ayant un élément rectiligne commun. Soit, par exemple, $p = 3$; l'intersection de deux surfaces réglées du second degré ayant une droite commune est une ligne gauche du troisième degré. Soit encore $p = 5$; l'intersection d'une surface réglée du second degré avec une surface réglée du troisième degré et ayant une droite en commun donne encore en commun une ligne gauche du cinquième degré.

7. Quand on dit qu'une ligne est déterminée par un certain nombre de points, il s'agit de points pris au hasard; mais lorsque ces points ont une certaine position, il peut y avoir indétermination. Par exemple, une courbe plane du troisième degré est déterminée par neuf points; mais lorsque ces points sont les intersections de deux de ces courbes, on peut y faire passer une infinité de lignes du troisième ordre: il en est de même pour les courbes gauches. Ainsi une ligne gauche du quatrième ordre est

déterminée par huit points. Mais lorsque ces huit points sont les intersections de trois surfaces du second ordre, il est évident qu'en prenant ces surfaces deux à deux, il passe trois courbes du quatrième ordre par ces huit points; de même pour les lignes de tout ordre.

8. Faisant

$$mn = p,$$

on a

$$6N = 3p\left(\frac{p}{n} - n + 4\right) + (n-1)(n-2)(n-3);$$

faisant croître n par unités, on obtient successivement

$$6N' = 3p\left(\frac{p}{n+1} - n + 3\right) + n(n-1)(n-2),$$

$$6N'' = 3p\left(\frac{p}{n+2} - n + 2\right) + (n+1)(n-1)(n-2),$$

....

$$6(N - N') = 3p\left[\frac{p}{n(n+1)} + 1\right] - 3(n-1)(n-2);$$

or p est plus grand que $(n-1)(n-2)$; donc $N > N'$; on démontre de même que $N' > N''$, etc. Ainsi à mesure que n croît, les valeurs de N diminuent; plus n s'approche donc de m, plus le nombre de points déterminants diminue.

Par exemple, soit

$$p = 60;$$

on aura pour

	Points déterminants.
1.60........	1890
2.30........	960
3.20........	660
4.15........	391
5.12........	214
6.10........	130

9. Toutes les courbes de degré mn, quoique déterminées par des nombres divers de points, ont en commun la propriété d'être rencontrées par un plan en mn points.

10. Théorème IV. *L'enveloppe des plans osculateurs d'une courbe à double courbure donnée par l'intersection de deux surfaces* S_m, S_n *est représentée par une équation de degré* $mn(m+n-2)$.

Démonstration. Cette enveloppe est le lieu des tangentes. Soient

$$F=0, \quad f=0$$

les équations rendues homogènes des surfaces de degrés respectifs m, n dont l'intersection donne les courbes, et x_1, y_1, z_1, u_1 les coordonnées d'un point de la courbe; soient encore

$$S=0$$

l'équation du plan tangent à la surface F et passant par le point $(x_1 y_1 z_1 u_1)$; et

$$s=0$$

l'équation du plan tangent à la surface f passant par le même point : alors

$$S=0, \quad s=0$$

seront les équations de la tangente à la courbe passant par ce même point; $F=0$, $f=0$ ne contiennent que les coordonnées fixes x_1, y_1, z_1, u_1 et aux degrés m et n; $S=0$, $s=0$ contiennent les mêmes coordonnées fixes aux degrés $m-1$, $n-1$ et encore les coordonnées constantes au premier degré x, y, z, u. Eliminant les coordonnées x_1, y_1, z_1, u_1 entre les quatre équations homogènes, en considérant x, y, z, u comme des coefficients

d'après le théorème II, le degré de l'équation finale est

$$mn(m-1)(n-1)\left(\frac{1}{m-1}+\frac{1}{n-1}\right)=mn(m+n-2).$$

On n'a pas besoin d'avoir égard aux coefficients des équations

$$F=0,\quad f=0,$$

car ce sont des constantes.

11. Pour qu'on puisse mener d'un point donné une tangente à la courbe $F=0$, $f=0$, ou, ce qui revient au même, un plan tangent à la surface enveloppe, il faut que le point soit situé sur la surface enveloppe que nous venons de considérer. Le point étant donc pris sur cette surface, les coordonnées des points de contact qui satisfont à trois des quatre équations

$$F=0,\quad f=0,\quad S=0,\quad s=0$$

satisfont à la quatrième. Si donc m n'est pas inférieur à n, le plus grand nombre de points de contact sera donné par le système d'équations

$$F=0,\quad f=0,\quad S=0.$$

Ainsi $mn(m-1)$ est le nombre de tangentes qu'on peut mener par le point donné; c'est la *classe* de la courbe (S_m, S_n).

Observation. Cette expression a même lieu lorsque la courbe est plane; alors

$$n=1,$$

et $mn(m-1)$ devient $m(m-1)$.

12. *Définition.* L'enveloppe des plans normaux à la courbe se nomme *surface polaire de la courbe.*

Théorème V. *Le degré de l'équation de la surface*

polaire relative à la courbe (S_m, S_n) *est*

$$mn(3m+3n-4).$$

Démonstration. On trouve l'équation de cette surface en éliminant x_1, y_1, z_1, coordonnées du point de la courbe entre les quatre équations

$$F=0, \quad f=0,$$
$$(x-x_1)\,dx_1+(y-y_1)\,dy_1+(z-z_1)\,dz_1=0,$$
$$(x-x_1)\,d^2x_1+(y-y_1)\,d^2y_1+(z-z_1)\,d^2z_1-ds'_z=0\,(*).$$

La deuxième équation est de degré $m+n-1$ et la troisième de degré $2m+2n-3$; donc, d'après le théorème II, les x, y, z montent au degré

$$mn(m+n-1)(2m+2n-3)\left(\frac{1}{m+n-1}+\frac{1}{2m+2n-1}\right)$$
$$=mn(3m+3n)-4.$$

13. Le plan passant par la tangente au point x_1, y_1, z_1 et par la perpendiculaire élevée en ce point au plan osculateur nommé axe du plan osculateur a pour équation

$$(A)\left\{\begin{aligned}&(x-x_1)[dy_1(dx_1\,d^2y_1-dy_1\,d^2x_1)-dz_1(dy_1\,d^2z_1-dz_1\,d^2y_1)]\\&+(y-y_1)[dz_1(dy_1\,d^2z_1-dz_1\,d^2y_1)-dx_1(dz_1\,d^2x_1-dx_1d^2z_1)]\\&+(z-z_1)[dx_1(dz_1\,d^2x_1-dx_1\,d^2z_1)-dy_1(dy_1\,d^2z_1-dz_1d^2y_1)]\end{aligned}\right\}=0,$$

le degré en x_1, y_1, z_1 se monte à $3m+3n-5$.

L'enveloppe de ce plan a une équation de degré

$$3mn(2m+2n-3).$$

14. Le degré de la surface réglée formée par les normales principales est

$$2mn(2m+2n-3);$$

tel est aussi le degré de la surface réglée formée par les

(*) Duhamel, t. Ier, p. 398.

perpendiculaires au plan osculateur passant par le point x_1, y_1, z_1.

15. *Application.* $m = n = 2$.

Degré du plan osculateur. .	8
Plan normal.	32
Plan (A).	60
Normale principale.	40
Axes du plan osculateur. . .	40

16. La courbe formée par les centres de courbure est donnée par l'intersection des deux surfaces réglées formées par les plans osculateurs et les plans normaux, surfaces dont les degrés sont

$$mn(m+n-2) \quad \text{et} \quad mn(3m+3n-4).$$

Cette courbe n'est pas l'arête de rebroussement de la surface polaire ; cette arête est sur cette surface et sur celle que l'on obtient en éliminant x_1, y_1, z_1 entre les quatre équations

$$F=0, \quad f=0,$$

$$(x-x_1)\,dx_1+(y-y_1)\,dy_1+(z-z_1)\,dz_1=0,$$

$$(x-x_1)\,d^3x_1+(y-y_1)\,d^3y_1+(z-z_1)\,d^3z_1=0,$$

ce qui donne une surface de degré $mn(5m+5n-8)$.

THÉORÈME SUR UNE PROPRIÉTÉ DES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

PAR M. BRIOSCHI,
Professeur à l'université de Pavie (*).

Lemme. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n racines supposées inégales de l'équation

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

En posant

$$\psi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_r),$$
$$\varphi(x) = (x - x_{r+1})(x - x_{r+2}) \ldots (x - x_n),$$

on a

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\psi(x)}, \quad \varphi'(x) = \frac{f'(x)}{\psi(x)} - f(x)\frac{\psi'(x)}{\psi^2(x)};$$

de la dernière desquelles on déduit, vu que

$$f(x_{r+1}) = 0, \ldots,$$

$$\varphi'(x_{r+1})\varphi'(x_{r+2}) \ldots \varphi'(x_n) = \frac{f'(x_{r+1})f'(x_{r+2}) \ldots f'(x_n)}{\psi(x_{r+1})\psi(x_{r+2}) \ldots \psi(x_n)}.$$

Or on a évidemment

$$\psi'(x_1)\psi'(x_2) \ldots \psi'(x_r)\psi(x_{r+1})\psi(x_{r+2}) \ldots \psi(x_n)$$
$$= (-1)^{r(n-r)} f'(x_1) f'(x_2) \ldots f'(x_r);$$

par conséquent

$$\varphi'(x_{r+1})\varphi'(x_{r+2}) \ldots \varphi'(x_n)$$
$$= (-1)^{r(n-r)} \frac{f'(x_{r+1})f'(x_{r+2}) \ldots f'(x_n)}{f'(x_1)f'(x_2) \ldots f(x_r)} \psi'(x_1)\psi'(x_2) \ldots \psi'(x_r);$$

(*) Nous engageons le lecteur à prendre un exemple particulier, par exemple $r = 2$, $n = 5$.

et parce que, en indiquant par D, Δ, ∇ les produits respectifs des carrés des différences des racines des équations

$$f(x)=0,\quad \varphi(x)=0,\quad \psi(x)=0,$$

on a, comme on sait,

$$\pm D=f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_n),$$
$$\pm \Delta=\varphi'(x_{r+1})\varphi'(x_{r+2})\ldots \varphi'(x_n),$$
$$\pm \nabla=\psi'(x_1)\psi'(x_2)\ldots \psi'(x_r)$$

(les quantités D, Δ, ∇ étant prises avec le signe positif lorsque les nombres n, $n-r$, r seront $\equiv 0$ ou $\equiv 1$ (mod. 4), et avec le signe négatif dans les autres cas); on aura

$$(\pm\Delta)=(-1)^{r(n-r)}\frac{(\pm\nabla)}{f'^2(x_1)f'^2(x_2)\ldots f'^2(x_r)}(\pm D).$$

Supposons

$$r=n-2,$$

on aura

$$\pm\Delta=-(x_{n-1}-x_n)^2,$$

et les quantités D, ∇ devront être prises avec des signes contraires. Donc

$$(x_{n-1}-x_n)^2=\frac{\nabla}{f'^2(x_1)f'^2(x_2)\ldots f'^2(x_{n-2})}\cdot D;$$

mais

$$x_{n-1}+x_n=-(a_1+x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}),$$

par conséquent

$$(1)\quad \begin{cases} x_{n-1}=-\dfrac{1}{2}(a_1+x_1+\ldots+x_{n-2}) \\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{\nabla}}{f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_{n-2})}\sqrt{D} \\ x_n\;=-\dfrac{1}{2}(a_1+x_1+\ldots+x_{n-2}) \\ \qquad\qquad -\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{\nabla}}{f'(x_1)f'(x_2)\ldots f(x_{n-2})}\sqrt{D}. \end{cases}$$

Or D peut s'exprimer en fonction des coefficients de l'équation donnée, et $\frac{\sqrt{\nabla}}{f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_{n-2})}$ est une fonction rationnelle des racines $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$, vu que ∇ est un carré ; on a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. *Deux racines quelconques d'une équation algébrique du $n^{ième}$ degré peuvent être exprimées en fonction rationnelle des autres* n — 2.

Observation. Indiquant par

$$\theta(x_1, x_2, \ldots x_{n-2})$$

le second membre de la première des équations (1), on trouve facilement que cette fonction n'a que deux valeurs (Serret, *Algèbre supérieure,* p. 275). Ces deux valeurs sont celles des deux racines x_{n-1}, x_n.

Pour l'équation du troisième degré, en posant (*Alg. sup.*, p. 218)

$$x_2 = -\frac{1}{2}(a_1 + x_1) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{D}}{f'(x_1)} = \theta(x_1),$$

on trouve

$$x_3 = \theta(x_2), \quad x_1 = \theta(x_3),$$

c'est-à-dire x étant une racine quelconque : les trois racines seront

$$x, \ \theta(x), \ \theta^2(x).$$

Pour l'équation du quatrième degré, en posant

$$-\frac{1}{2}(a_1 + x_r + x_s) + \frac{1}{2}\frac{x_r - x_s}{f'(x_r)f'(x_s)}\sqrt{D} = \theta(x_r, x_s),$$

on a

$$x_r = \theta(x_r, x_s) = \theta(x_s, x_u) = \theta(x_u, x_r).$$

De ces propriétés des racines, on déduit que ces équations sont résolubles algébriquement.

Note. Incessamment une démonstration fort simple de ce théorème par M. A. Genocchi.

PROBLÈME SUR CINQ CONIQUES ET CINQ DROITES ANHARMONIQUEMENT CORRESPONDANTES;

Par M. E. DE JONQUIÈRES.

Question. On donne sur un plan : 1° trois points a, b, c; 2° cinq autres points d, e, f, g, h. Déterminer un point x tel, que les cinq coniques circonscrites au quadrilatère $abcx$ et passant respectivement par les cinq points d, e, f, g, h correspondent anharmoniquement à un faisceau de cinq droites données.

Solution. Soit P le sommet du faisceau de cinq droites Pd, Pe, Pf, Pg, Ph qui est homographique à celui des cinq droites données. Ce point, comme on sait, est unique et se détermine aisément par l'intersection de deux coniques qui ont trois points communs connus à priori.

Il résulte du théorème général de M. Chasles sur la construction de la courbe du troisième ordre que les dix points a, b, c, x, d, e, f, g, h, P sont situés sur une même courbe du troisième ordre U, qui se trouve déterminée par les seuls neuf points connus, sans qu'on ait besoin de faire intervenir le point cherché x.

Le rayon Pd correspond anharmoniquement à la conique ($abcxd$) qu'il rencontre au point d et en un autre point d'. Ce point d', appartenant aussi à la courbe du troisième ordre, se déterminera aisément en n'employant que la ligne droite et le cercle, puisque les deux autres points de rencontre du rayon Pd avec la courbe, savoir P et d, sont déjà connus. La conique ($abcxdd'$) est donc entièrement déterminée. On cherchera pareillement le second point de rencontre e' du rayon Pe avec la conique

$(abcxe)$ qui lui correspond anharmoniquement, et cette conique, dont on connaît déjà quatre points, sera déterminée.

Cela posé, les deux coniques $(abcxdd')$ et $(abcxee')$ ont trois points communs a, b, c; on en conclura donc immédiatement le quatrième x qui satisfait à la question.

Ainsi le problème est résolu.

PROBLÈME SUR LES COURBES DU QUATRIÈME ORDRE;

Par M. E. DE JONQUIÈRES.

Problème. *Construire géométriquement la courbe du quatrième ordre qui passe par quatorze points donnés en supposant que huit de ces points soient situés sur une même conique.*

Soient a, b, c, d, e, f, g, h les huit points donnés sur une conique C, et i, k, l, m, n, o les six autres points. Il s'agit de faire passer par ces quatorze points une courbe du quatrième ordre W.

Je désignerai, pour abréger, par B l'ensemble des quatre points a, b, c, d, et par B″ celui des quatre points e, f, g, h, de telle sorte que (B, l) signifiera la conique déterminée par les cinq points a, b, c, d, l, et ainsi des autres.

La conique (B'', i) coupera la courbe du quatrième ordre W en trois autres points inconnus x, y, z. Je désignerai par B′ l'ensemble des quatre points i, x, y, z dont le point i est seul connu.

Considérons les deux faisceaux de coniques (B, B''), (B, k), (B, l), (B, m), (B, n), (B, o) et (B', B''), (B', k), (B', l), (B', m), (B', n), (B', o).

Ces courbes se correspondent deux à deux anharmo-

niquement, parce qu'une conique du premier faisceau, telle que (B, k) et celle (B′, k) qui lui correspond dans le deuxième, passent ensemble par un même point k de la courbe W. Ceci résulte d'un théorème général démontré par M. Chasles dans les *Comptes rendus*, tome XXXVII, séance du 15 septembre 1853 (*voir* la *Note du Rédacteur*, p. 372).

Cela posé, soit P le sommet d'un faisceau de cinq droites Pk, Pl, Pm, Pn, Po correspondant anharmoniquement aux coniques (B, k), (B, l), (B, m), (B, n), (B, o) (point qu'on sait construire sans difficulté), et soit Pa' le rayon qui, dans le faisceau de droites, correspond à la conique donnée (B, B″) qui fait partie du faisceau de coniques. Enfin, appelons a' et B′ les deux points d'intersection de ce rayon avec la conique (B″, i) ou (B′, B″).

Les six droites Pa', Pk, Pl, Pm, Pn, Po correspondent aussi harmoniquement avec les six coniques (B′, B″), (B′, k), (B′, l), (B′, m), (B′, n), (B′, o), puisque celles-ci correspondent anharmoniquement, comme je viens de le dire, aux six coniques (B, B″), (B, k), (B, l), (B, m), (B, n), (B, o).

Donc les neuf points i, a', b', k, l, m, n, o, P déterminent une courbe du troisième ordre qui, en vertu du théorème fondamental de M. Chasles sur la description de ces courbes (*Comptes rendus*, 1853), passe aussi par les trois autres points x, y, z communs à toutes les coniques du faisceau (B′, B″), (B′, k), etc.

Cette courbe du troisième ordre U et la conique (B′, B″) ont trois points communs déjà connus, savoir : i, a', et b'; il s'agit de trouver les trois autres x, y et z.

Pour cela, joignons par une droite les deux points k et l, par exemple, et soit q le troisième point de rencontre de la droite kl avec la courbe U, point facile à détermi-

ner sans tracer la courbe. Puis regardons l'ensemble de cette droite et de la conique (B', B'') comme formant une courbe du troisième ordre U'.

Les courbes U et U' ont six points communs déjà connus, savoir i, a', b', k, l, q; leurs trois autres points d'intersection sont précisément les points cherchés x, y, z.

La question est ainsi ramenée à celle où il s'agit de trouver les trois autres points d'intersection de deux courbes du troisième ordre qui ont six points communs connus à priori, question résolue très-simplement par M. Chasles dans les *Comptes rendus* de 1855, séance du 31 décembre, et par moi-même dans l'ouvrage intitulé : *Mélanges de Géométrie pure*, p. 193.

Dès que ces trois points x, y, z seront connus, la construction de la courbe W s'achèvera sans difficulté. Car toute conique circonscrite arbitrairement au quadrilatère *abcd* déterminera celle qui lui correspond anharmoniquement dans le faisceau circonscrit au quadrilatère $ixyz$. Les quatre points d'intersection de ces deux coniques homologues appartiendront à la courbe W, dont on construira ainsi autant de points qu'on voudra.

Ainsi le problème est résolu.

Note du Rédacteur. M. de Jonquières s'appuie sur un théorème de M. Chasles que nous croyons utile de citer textuellement.

Théorème général. *Si l'on a deux faisceaux de coniques dont les unes passent par quatre points* a, b, c, d *et les autres par quatre points* a', b', c', d', *et que ces courbes se correspondent deux à deux de manière que le rapport anharmonique de quatre courbes du premier faisceau soit égal à celui de quatre courbes correspondantes dans le deuxième faisceau, le lieu de tous les points d'intersection des coniques correspondants sera*

une courbe du quatrième ordre passant par les huit points a, b, c, d, a′, b′, c′, d (*Comptes rendus*, t. XXXVII, 1853, 2ᵉ semestre, p. 273).

Soient

$$r=0,\quad s=0,\quad u=0,\quad v=0$$

les équations de quatre côtés d'un quadrilatère;

$$r_1=0,\quad s_1=0,\quad u_1=0,\quad v_1=0$$

les équations des quatre côtés d'un second quadrilatère: les faisceaux de coniques passant respectivement par les sommets des quadrilatères ont pour équations

$$\alpha rs+uv=0,$$
$$\alpha r_1 s_1+u_1 v_1=0.$$

Le paramètre variable α étant le même, les faisceaux se correspondent anharmoniquement. Donc, éliminant α, on a

$$rsu_1 v_1+r_1 s_1 uv=0,$$

pour le lieu cherché du quatrième ordre et passant par les huit sommets des quadrilatères.

NOTE

Sur l'aire d'un polygone plan et sur l'expression de cette aire en fonction des coordonnées des sommets;

PAR M. E. PROUHET.

On définit ordinairement l'aire d'une figure plane en disant que c'est *la portion de plan limitée par son contour*. Mais cette définition n'offre plus de sens raisonnable lorsque ce contour, fermé d'ailleurs, présente des

points doubles, comme cela a lieu dans les polygones étoilés. Il est cependant possible d'étendre la notion de superficie de manière à la rendre applicable à tous les cas.

2. Soient A_1, A_2,..., A_n les n sommets consécutifs d'un polygone, soit PM un rayon vecteur dont l'extrémité P, que nous nommerons le *pôle,* demeure fixe pendant que l'autre extrémité M se meut sur le périmètre dans un sens déterminé, A_1, A_2,..., A_n par exemple. Le rayon vecteur étant d'abord en PA_1 et venant ensuite en PA_2, nous dirons qu'il a engendré ou décrit le triangle PA_1A_2, de sorte que le point M, revenu à sa position initiale après avoir parcouru tout le contour, aura décrit n triangles.

Or les sinuosités du contour pouvant faire que PM tourne tantôt dans un sens que nous nommerons *direct,* tantôt dans le sens opposé, il sera naturel de considérer comme *positives* les aires décrites dans le premier sens, et comme *négatives* celles qui sont décrites dans le mouvement rétrograde. Cette convention est déjà faite en mécanique et son introduction en géométrie offre de grands avantages, comme le montrera la suite de cet article.

3. D'après cela, si le polygone est convexe et le pôle P pris dans son intérieur, tous les triangles seront décrits dans le même sens et leur somme algébrique se réduira, suivant les cas, à $\pm$ l'aire du polygone, le mot *aire* étant pris encore dans son acception ordinaire.

Si le pôle est extérieur, tous les triangles ayant quelque portion de leur surface dans l'intérieur du polygone auront le même signe, tous ceux qui sont entièrement situés hors du polygone auront le signe opposé, et il est visible que la somme algébrique des triangles de première et de seconde espèce sera encore égale à $\pm$ la surface du polygone.

4. Ces résultats conduisent naturellement à la défi-

nition qu'il convient d'adopter et qui est la suivante :

L'aire d'un polygone plan est la somme algébrique des triangles engendrés par un rayon vecteur dont l'extrémité fixe est placée en un point quelconque du plan et dont l'autre parcourt le périmètre du polygone dans un sens déterminé.

Toutefois, pour justifier complétement cet énoncé, il faut démontrer que l'expression ainsi définie demeure la même en grandeur et en signe pour un même sens de rotation, quel que soit le pôle. C'est ce que l'analyse suivante mettra hors de doute.

5. Considérons, en premier lieu, un triangle PA_1A_2 dont l'un des sommets, pris pour pôle, soit à l'origine de coordonnées rectangulaires. Désignons par x_1, y_1 les coordonnées du point A_1 et par x_2, y_2 celles du point A_2.

En supposant d'abord que le triangle soit tout entier dans l'angle YOX, et que l'on ait $x_1 y_2 > y_1 x_2$, on trouvera sans peine pour l'aire absolue

$$\frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

par conséquent, si l'on désigne $x_1 y_2 - x_2 y_1$ par $[1, 2]$ et si en énonçant un triangle, on marque par l'ordre des lettres le sens dans lequel le côté A_1A_2 est parcouru, on aura

$$PA_1A_2 = \frac{1}{2}[1, 2],$$

d'où résulte

$$PA_2A_1 = - PA_1A_2 = - \frac{1}{2}[1, 2],$$

et, par conséquent,

$$PA_2A_1 = \frac{1}{2}[2, 1],$$

puisque

$$[2, 1] = -[1, 2].$$

On voit par là qu'en écrivant dans les crochets les indices dans le même ordre que dans le premier membre, le second membre prend de lui-même le signe convenable.

6. Maintenant, si l'on suppose que les axes primitifs tournent d'un angle α, le second membre conservera la même valeur, comme on s'en assurera sans peine en mettant à la place des nouvelles coordonnées leurs valeurs en fonction des anciennes, d'où résulte que la formule démontrée pour une position particulière des axes est vraie pour une position quelconque.

7. Considérons actuellement un polygone A_1, A_2, A_3,..., A_n. Des rayons vecteurs étant menés à tous les sommets, on aura

$$PA_1 A_2 = \frac{1}{2}[1, 2],$$

$$PA_2 A_3 = \frac{1}{2}[2, 3],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$PA_{n-1} A_n = \frac{1}{2}[n-1, n],$$

$$PA_n A_1 = \frac{1}{2}[n, 1],$$

d'où

$$PA_1 A_2 + PA_2 A_3 + PA_3 A_4 + \ldots + PA_n A_1$$
$$= \frac{1}{2}[1, 2] + \frac{1}{2}[2, 3] + \ldots + \frac{1}{2}[n, 1].$$

Le premier membre (en ayant égard aux rotations indiquées par l'ordre des lettres) est ce que nous nommons l'aire du polygone relative au sens A_1, A_2,..., A_n. On a donc en désignant l'aire par S,

$$S = \frac{1}{2}\sum[1, 2].$$

Telle est donc l'expression de l'aire dans le cas le plus général possible. Le second membre, que nous savons déjà être indépendant de la direction des axes, est, en outre, indépendant de leur origine, comme on s'en assure en transportant cette origine en un point quelconque. Les dénominations adoptées plus haut se trouvent donc complétement justifiées.

8. La formule que nous venons de démontrer exige seulement que le polygone soit fermé. Les côtés peuvent d'ailleurs se couper d'une manière quelconque, plusieurs sommets peuvent se réunir en un seul sans que la formule cesse d'être applicable, pourvu que le périmètre puisse être considéré comme un fil non interrompu qui, partant du point A_1 et passant successivement par les points A_2, A_3, etc., finit par revenir au point de départ.

D'après cela, un polygone de n sommets pourra être considéré comme ayant $2n$, $3n$,..., kn côtés. Il suffira de concevoir que le fil revenu en A_1 recommence à passer, et dans le même ordre, par les points A_2, A_3, etc., et cela un nombre quelconque de fois, pourvu qu'il finisse par s'arrêter au point de départ.

9. L'emploi des signes $+$ et $-$ pour distinguer les aires engendrées par des rotations directes ou inverses doit avoir l'utilité de ces sortes de conventions qui est de réunir dans un même énoncé un nombre souvent considérable de théorèmes du même genre. En voici quelques exemples sur lesquels le lecteur pourra s'exercer.

A, B, C, etc., désignant des points distribués comme on voudra dans un plan et ABC l'aire du triangle dont les sommets sont A, B, C, on aura :

Pour cinq points :

$$ACE . ABD = ABE . ACD + ABC . ADE.$$

(Théorème de Fontaine.)

$$(ABCDE)^2 - (ABC + BCD + CDE + DEA + EAB).ABCDE + ABC.BCD + BCD.CDE + CDE.DEA + DEA.EAB + EAB.ABC = 0.$$

(Théorème de Gauss.)

Pour sept points :

$$ABE.ACF.ADG = ABE.ACD.AFG + ABC.ADE.AFG + ACF.ADE.ABG + ACD.AEF.ABG + ADG.ABC.AEF.$$

(Théorème nouveau.)

Il suffira de démontrer ces égalités dans le cas fort étendu où le polygone ayant pour sommets les points considérés est convexe. Démontrées pour ce cas, elles devront se réduire à de véritables identités quand on y substituera les valeurs des aires en fonction des coordonnées, et dès lors elles auront lieu quelle que soit la disposition des points considérés.

SOLUTION DE LA QUESTION SUR UN JEU DE CARTES

(voir t. XIV, p. 168);

PAR M. L'ABBÉ PEPIN.

Réponse. Soit t le plus petit nombre entier qui satisfasse à l'inégalité

$$\frac{m}{n^{t-1}} \leqq 1,$$

ce nombre t sera le nombre demandé.

Solution. Après la première distribution, la carte désignée pourra occuper un rang quelconque dans le paquet

où elle se trouve; mais après la seconde distribution, les cartes provenant des q paquets situés au-dessous ou au-dessus du paquet r_1 occuperont les l_2 premières et les l_2 dernières places de chaque paquet, l_2 étant égal à la partie entière de la fraction $\frac{q.m}{n}$, c'est-à-dire

$$(1) \qquad l_2 = \mathrm{E}\left(\frac{q.m}{n}\right).$$

Ainsi le rang s_2 occupé par la carte désignée dans le paquet r_2 sera compris entre les deux nombres

$$l_2 \quad \text{et} \quad m - l_2 + 1.$$

Généralement, désignons par l_t le nombre des cartes qui se trouvent au-dessus et au-dessous de la carte désignée après t distributions dans le paquet r_t. On aura évidemment

$$(2) \qquad l_{t+1} = \mathrm{E}\left(\frac{q.m + l_t}{n}\right);$$

et le rang s_{t+1} qu'elle occupera dans le paquet r_{t+1} sera compris entre les deux nombres l_{t+1} et $m - l_{t+1} + 1$.

La formule (2) donnera successivement

$$l_3 = \mathrm{E}\left(\frac{q.m + l_2}{n}\right), \quad l_4 = \mathrm{E}\left(\frac{q.m + l_3}{n}\right), \ldots$$

Mais si l'on observe que la partie entière du quotient d'une division ne change pas quand on remplace le dividende par un nombre qui n'en diffère en plus que d'une quantité plus petite que l'unité, on aura

$$l_3 = \mathrm{E}\left(\frac{q.m + \frac{qm}{n}}{n}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{q.m}{n^2} \cdot \frac{n^2 - 1}{n - 1}\right),$$

$$l_4 = \mathrm{E}\left[\frac{q.m + \frac{q.m(n^2 - 1)}{n^2(n - 1)}}{n}\right] = \mathrm{E}\left(\frac{q.m}{n^3} \cdot \frac{n^3 - 1}{n - 1}\right),$$

et généralement

$$l_t = \mathrm{E}\left(\frac{q.m}{n^{t-1}} \cdot \frac{n^{t-1} - 1}{n - 1}\right).$$

or le rang s_t étant compris entre les deux nombres l_t et $m - l_t + 1$, si l'on veut qu'il soit égal à $p + 1$, il faut et il suffit que l'on ait $l_t = p$; car alors on aura

$$m - l_t + 1 = p + 2,$$

et le nombre entier s_t compris entre p et $p + 2$ ne pourra être que le nombre $p + 1$.

Le nombre t devra donc satisfaire à l'inégalité

$$0 \leqq \frac{q.m}{n^{t-1}} \cdot \frac{n^{t-1} - 1}{n - 1} - p < 1.$$

En remplaçant $n - 1$ par $2q$, p par $\frac{m-1}{2}$, et réduisant, cette inégalité peut se mettre sous la forme suivante :

$$0 \leqq \frac{1 - \frac{m}{n^{t-1}}}{2} < 1.$$

D'ailleurs il est évident que cette inégalité est équivalente à la suivante

$$(3) \qquad \frac{m}{n^{t-1}} \leqq 1.$$

Le nombre demandé t est donc le plus petit nombre entier qui satisfasse à la formule (3). C. Q. F. D.

TRISECTION DE L'ANGLE;

Par M. POUDRA.

M. Chasles, dans son Cours à la Sorbonne, a donné cette solution fort élégante de l'ancien problème de la trisection de l'angle.

Soit l'arc ab pris sur un cercle dont le centre est o. Soit porté sur cet arc, de a vers b, un arc quelconque am, et de b vers a un arc $bm_1 = 2.am$. Prenons sur la circonférence un point fixe c quelconque et menons les droites om, cm_1. Il est évident qu'il en résultera l'angle

$$aom = bcm_1.$$

Pour diverses positions du point m sur la circonférence, il en résultera autant de points m_1 correspondants, et, par suite, à chaque rayon om correspondra une autre droite cm_1 telle, que les angles aom, bcm_1 seront toujours égaux; donc les points o et c seront les centres de deux faisceaux homographiques tels, que les rayons homologues se couperont en des points n dont le lieu géométrique sera, par conséquent, une section conique coupant la circonférence au point α, tiers de l'arc ab.

On peut ajouter quelques détails à cette solution.

Prenons pour le point C celui qui est diamétralement opposé au point b. En construisant la courbe des points n, il sera facile de voir que :

1°. Le côté ao de l'angle est une tangente à la courbe;

2°. Une parallèle à ao menée par c est une seconde tangente;

3°. Il en résulte que co est un diamètre et le point C, milieu de co, sera le centre;

4°. La droite *ca* est une parallèle à une asymptote;

5°. Une perpendiculaire en *c* à cette droite *ca* est une parallèle à l'autre asymptote;

6°. Les droites Cx, Cy menées par le centre, parallèlement à ces droites, seront les asymptotes;

7°. Les bissectrices CA, CB des asymptotes seront les axes de la courbe;

8°. Cette courbe est une hyperbole équilatère dont on connaît de suite le centre et les axes, etc.;

9°. Cette courbe coupe la circonférence en quatre points dont l'un est celui *c* connu, les trois autres seront α_1, α_2, α_3 qui seront tels, que $a\alpha_1 = \frac{1}{3}$ de l'angle *aob*; $a\alpha_2$ sera le tiers d'une circonférence plus *aob*, et enfin $a\alpha_3$ sera le tiers de l'angle $360° - aob$.

Puisqu'on connaît de suite le centre et les axes de l'hyperbole équilatère qui résout le problème de la trisection de l'angle, on peut employer toutes les méthodes connues pour tracer cette courbe, sans avoir besoin de recourir à la construction des deux faisceaux ci-dessus.

Note du Rédacteur.

1°. *Compas trisecteur.* M. Répécaud, colonel du génie en retraite, a inventé cet instrument. Il est fondé sur ce principe. Soit l'arc ABC moindre que 180 degrés et O le centre. Si le rayon OB coupe la corde AC en un point E tel que l'on ait

$$AE = AB,$$

alors

$$\text{arc AB} = \frac{1}{3} \text{arc AC}.$$

Si l'on prolonge le rayon BO jusqu'à ce qu'il coupe de nouveau la circonférence en D, on aura aussi

$$DE = DC;$$

il est facile de trouver un tel point D à l'aide d'un com-

pas, dont une branche passe constamment par C et dont la tête se meut sur la circonférence jusqu'à ce que la condition DE = DC soit satisfaite : les deux branches portant des divisions égales, cette égalité se vérifie à vue.

Supposons que le point B soit quelconque. Portons la corde AB sur la corde AC, de A en E, et menons BE; la perpendiculaire abaissée du centre c sur la corde AC rencontre BE en un point I; il serait curieux de connaître le lieu de ce point I; lorsqu'il coïncide avec C, il sert à opérer la trisection.

2°. M. le docteur Toscani, professeur de physique au lycée de Sienne (Toscane), fonde la trisection sur le lieu géométrique d'un *podaire* du cercle. Soit C le centre et V un point fixe, extrémité de l'arc à trisecter. Prolongeons le rayon OV d'une longueur VP = OV; projetons le point P sur toutes les tangentes au cercle; T étant le point de contact et P′ la projection correspondante de P, lorsqu'on aura

$$VP' = VT,$$

alors

$$\text{angle } VP'P = \frac{1}{3} \text{ angle } C\dot{V}P'.$$

QUESTIONS.

344. Un point fixe O est donné dans un angle plan du sommet A; par O on mène une transversale rencontrant les côtés de l'angle en B et C; s et s_1 étant les aires des triangles OBA, OCA, la somme $\frac{1}{s} + \frac{1}{s_1}$ est constante, de quelque manière qu'on mène la transversale. (MANNHEIM.)

345. $f(x) = 0$ est une équation algébrique à coefficients *entiers*; si $f(0)$ et $f(1)$ sont des nombres impairs, l'équation n'a aucune racine *entière*. (GAUSS.)

DEUX PROBLÈMES SUR LES SURFACES DU DEUXIÈME DEGRÉ;

Par M. POUDRA.

Problème I. Une surface du second degré étant donnée par neuf points, on demande de lui mener : 1° un plan tangent par un de ces points; 2° par une droite extérieure.

Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 les neuf points donnés. On veut avoir le plan tangent à la surface au point 9.

On détermine d'abord la courbe gauche du quatrième degré qui passe par les huit points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Par 9, on fait passer deux plans qui coupent cette courbe chacun en quatre points, lesquels avec le point 9 déterminent deux sections coniques. Le plan passant par les deux tangentes au point 9 à ces deux coniques sera le plan cherché.

Remarque. Il n'est pas nécessaire de tracer les deux coniques. Car soient m, n, p, q et 9 les cinq points qui déterminent une de ces coniques. On sait que la tangente en 9 à cette conique, plus les trois droites $9n$, $9p$, $9q$, forment un faisceau dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre droites $m9$, mn, mp, mq. Donc, etc.

Pour mener à la surface du deuxième degré un plan tangent par une droite extérieure L, il faut prendre sur cette droite deux points a et b; par la droite $a9$ mener trois plans sécants qui détermineront trois coniques, à chacune desquelles par a on mènera deux tangentes; on déterminera ainsi six points de tangence qui appartiendront ainsi à la section conique, courbe de contact de

la surface du deuxième degré et du cône circonscrit dont a est le sommet. On déterminerait de même la courbe de contact d'un autre cône circonscrit dont b serait le sommet. Ces deux sections coniques se couperont en deux points. Les plans passant par la droite L et ces deux points seront les plans tangents cherchés.

Problème II. Deux surfaces du deuxième degré étant données par 9 points, on demande de déterminer leur commune intersection.

Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 les neuf points de la première et $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$, $7'$, $8'$, $9'$ ceux de la seconde surface. On commence par déterminer dans chacune de ces surfaces la courbe du quatrième ordre qui passe par les huit points 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 et $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$, $7'$, $8'$. Puis par la droite $99'$ qui joint les points restants, on fait passer une suite de plans sécants; chacun d'eux détermine dans les surfaces deux sections coniques dans un même plan, qui se coupent généralement en quatre points appartenant à la courbe cherchée qui sera ainsi évidemment du quatrième ordre. Donc, etc.

Par les huit points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 on peut faire passer $\frac{8.7}{2} = 28$ hyperboloïdes ayant la même courbe d'intersection.

Pour déterminer cette courbe, on fait passer un hyperboloïde par la droite (1, 2) et par les six points restants 3, 4, 5, 6, 7, 8, puis un second par la droite (7.8) et par les six autres points 1, 2, 3, 4, 5, 6. On peut ainsi prendre $\frac{8.7}{2} = 28$ droites différentes qui, prises chacune à part, forment avec les six points restants un hyperboloïde.

Donc ce nombre est de 28. Remarquons que chacun de ces hyperboloïdes contient deux des points donnés *sur une même génératrice.*

DISCUSSION D'UNE ÉQUATION NUMÉRIQUE DU SECOND DEGRÉ A TROIS VARIABLES (Suite d'une première Note)

(voir page 322).

Dans la discussion de l'équation du second degré à trois variables, nous avons admis l'existence d'un centre unique ; on a vu comment la nature de la surface se détermine, alors, au moyen des signes des invariants

$$AA' - B''^2,\quad AA'' - B'^2,\quad A'A'' - B^2,$$

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2.$$

Quand il n'y a pas de centre, la valeur de

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2$$

est nulle, mais, dans ce cas, les signes des valeurs de $AA' - B''^2$, $AA'' - B'^2$, $A'A'' - B^2$ font immédiatement savoir de quel genre est la surface considérée.

En effet, dans le cas dont il s'agit, l'équation proposée ne peut représenter que l'un des deux paraboloïdes ou un cylindre parabolique.

Si la surface est un paraboloïde hyperbolique, il faut que parmi les trois sections par les trois plans coordonnés il y en ait au moins une du genre des hyperboles, puisque les trois plans coordonnés ne peuvent être à la fois parallèles à l'axe de la surface. Donc, parmi les trois différences $AA' - B''^2$, $AA'' - B'^2$, $A'A'' - B^2$ il y en aura

au moins une dont la valeur sera négative. Cette condition est d'ailleurs suffisante pour que l'équation proposée représente un paraboloïde hyperbolique, car l'autre paraboloïde et le cylindre parabolique ne peuvent donner lieu à une section du genre des hyperboles.

Si la surface est un paraboloïde elliptique, l'une des sections par les plans coordonnés sera une ellipse réelle ou imaginaire; par conséquent, l'un des binômes $AA'-B''^2$, $AA''-B'^2$, $A'A''-B^2$ sera positif. Et c'est là une condition suffisante pour que l'équation proposée représente un paraboloïde elliptique.

Enfin, lorsque la surface est un cylindre parabolique, les valeurs des expressions $AA'-B''^2$, $AA''-B'^2$, $A'A''-B^2$ sont nulles toutes trois.

Nous ne dirons rien du cas particulier où l'on trouve une infinité de centres, la discussion de l'équation ne peut, dans ce cas, offrir aucune difficulté. G.

QUESTIONS.

346. Dans le premier quadrant la somme des sinus d'un nombre quelconque d'arcs, divisée par la somme des cosinus de ces mêmes arcs, donne un quotient compris entre la tangente du plus grand de ces arcs et la tangente du plus petit de ces arcs.

347. Soit donnée l'équation

$$x^{2m+1}+ax^{2m-1}+bx^{2m-3}+\ldots+lx+k=0$$

qui ne renferme que des puissances impaires; il y a une racine réelle comprise entre $2\sqrt[2m+1]{\frac{k}{2}}$ et $-2\sqrt[2m+1]{\frac{k}{2}}$.

(Tchebichef).

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICIEL.

II.

Génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique.

Hyperboloïde à une nappe.— Le centre de la surface étant pris pour origine, l'équation sera de la forme

$$(1)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0.$$

1. Quand l'une des trois différences

$$B''^2 - AA',\quad B'^2 - AA'',\quad B^2 - A'A''$$

est nulle, ou, ce qui revient au même, lorsqu'une des trois sections par les plans coordonnés est du genre des paraboles, on tire immédiatement de l'équation (1) de la surface les équations de ses génératrices rectilignes.

Soit, par exemple,

$$B''^2 - AA' = 0,$$

on aura identiquement :

$$Ax^2 + 2B''xy + A'y^2 = \frac{(Ax + B''y)^2}{A},$$

et l'équation (1) deviendra

$$A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + \frac{(Ax + B''y)^2}{A} + F = 0,$$

d'où

$$Az(A''z + 2By + 2B'x) = -AF - (Ax + B''y)^2.$$

Le produit AF est nécessairement négatif, autrement le plan $z=0$ qui passe par le centre ne couperait pas la surface, ce qui ne peut avoir lieu puisque cette surface est un hyperboloïde à une nappe. Donc

$$-\mathrm{AF}-(\mathrm{A}x+\mathrm{B}''y)^2$$

est le produit des facteurs *réels*

$$\sqrt{-\mathrm{AF}}+\mathrm{A}x+\mathrm{B}''y,\quad \sqrt{-\mathrm{AF}}-\mathrm{A}x-\mathrm{B}''y.$$

Par conséquent, en nommant α, 6 deux constantes arbitraires, les équations des génératrices rectilignes seront, pour l'un des deux systèmes :

$$\mathrm{A}z=\alpha\left(\sqrt{-\mathrm{AF}}+\mathrm{A}x+\mathrm{B}''y\right),$$

$$\mathrm{A}''z+2\mathrm{B}y+2\mathrm{B}'x=\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{-\mathrm{AF}}-\mathrm{A}x-\mathrm{B}''y\right).$$

Et, pour l'autre :

$$\mathrm{A}z=6\left(\sqrt{-\mathrm{AF}}-\mathrm{A}x-\mathrm{B}''y\right),$$

$$\mathrm{A}''z+2\mathrm{B}y+2\mathrm{B}'x=\frac{1}{6}\left(\sqrt{-\mathrm{AF}}+\mathrm{A}x+\mathrm{B}''y\right).$$

Comme exemple, considérons l'équation

$$x^2+4y^2+z^2+2yz-xz+4xy-1=0.$$

En faisant

$$z=0,$$

on a

$$x^2+4y^2+4xy-1=0$$

ou

$$(x+2y)^2-1=0,$$

équation qui représente le système de deux droites parallèles.

Pour déterminer toutes les autres génératrices rectilignes de la surface, on remarquera que l'équation pro-

posée revient à

$$z^2 + 2yz - xz = 1 - (x + 2y)^2,$$

d'où

$$z(z + 2y - x) = (1 + x + 2y)(1 - x - 2y).$$

De sorte que les génératrices rectilignes de l'un des deux systèmes seront représentées par

$$z = \alpha(1 + x + 2y),$$

$$z + 2y - x = \frac{1}{\alpha}(1 - x - 2y).$$

Pour les génératrices appartenant au second système, on aura

$$z = 6(1 - x - 2y),$$

$$z + 2y - x = \frac{1}{6}(1 + x + 2y).$$

2. Si aucune des trois différences $B''^2 - AA'$, $B'^2 - AA''$, $B^2 - A'A''$ n'est nulle, on pourra déterminer les équations générales des génératrices rectilignes en transformant l'équation (1) proposée, comme nous allons l'indiquer.

Remarquons d'abord que cette équation revient à

$$(2) \qquad xf'_x + yf'_y + zf'_z + 2F = 0,$$

en posant

$$(3) \qquad f'_x = 2A\,x + 2B''\,y + 2B'\,z,$$

$$(4) \qquad f'_y = 2B''x + 2A'\,y + 2Bz,$$

$$(5) \qquad f'_z = 2B'x + 2B\,y + 2A'z.$$

Les dérivées f'_x, f'_y, f'_z peuvent être considérées comme trois nouvelles variables liées aux anciennes x, y, z par

les relations (3), (4), (5), et il est clair que ces relations permettent d'obtenir l'équation de la surface en fonction de trois quelconques des six variables f'_x, f'_y, f'_z, x, y, z; il suffit pour cela d'éliminer les trois autres entre les quatre équations (2),..., (5).

Parmi les différentes formes que l'on peut ainsi donner à l'équation de la surface, il en est une qui se prête facilement à la détermination des génératrices rectilignes parce qu'elle ne contient que les carrés des variables et un seul des trois rectangles. Cette équation s'obtient en prenant pour variable une seule des trois anciennes coordonnées, z par exemple, et les dérivées f'_x, f'_y relatives aux deux autres x, y.

Les quantités à éliminer sont x, y, f'_z; l'élimination donne pour résultat l'équation

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} A f_y'^2 - 2B'' f'_x f'_y + A' f_x'^2 + 4Dz^2 \\ \qquad + 4(AA' - B''^2)F = 0, \end{array}\right.$$

dans laquelle D représente l'invariant

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2.$$

Il est à remarquer que cette équation se déduit, par une règle très-simple, de l'équation proposée

$$(1)\quad Ax^2 + 2B''xy + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + F = 0.$$

Car la partie $A f_y'^2 - 2B'' f'_x f'_y + A' f_x'^2$ qui renferme les dérivées f'_y, f'_x relatives à y et x s'obtient en remplaçant x par f'_y et y par $-f'_x$ dans le trinôme

$$Ax^2 + 2B''^2 xy + A'y^2,$$

qui, dans l'équation (1) proposée, représente l'assemblage des termes contenant seulement y et x. Le terme indépendant $4(AA' - B''^2)F$ se forme en multipliant le terme indépendant des variables de l'équation proposée par le

quadruple de l'invariant $(AA' - B''^2)$ du même trinôme

$$Ax^2 + 2B''xy + A'y^2.$$

L'application de cette règle montre que la surface peut être aussi représentée par chacune des deux équations :

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{l} A''f_x'^2 - 2B'f_x'f_z' + Af_z'^2 + 4Dy^2 \\ \qquad + 4(AA'' - B'^2)F = 0, \end{array} \right.$$

$$(9)\quad \left\{ \begin{array}{l} A''f_y'^2 - 2Bf_y'f_z' + A'f_z'^2 + 4Dx^2 \\ \qquad + 4(A'A'' - B^2)F = 0, \end{array} \right.$$

lorsque les invariants $AA'' - B'^2$, $A'A'' - B^2$ ne sont pas nuls.

3. Au moyen de l'une quelconque des équations transformées (7), (8), (9), il est facile d'obtenir les équations générales des génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe.

En considérant, par exemple, l'équation (7), nous distinguerons deux cas, suivant que $B''^2 - AA'$ sera positif ou négatif.

1°. Supposons qu'on ait $B''^2 - AA' > 0$ et que les coefficients A, A' ne soient pas nuls.

Le trinôme $Af_y'^2 - 2B''f_x'f_y' + A'f_x'^2$ se décompose alors en deux facteurs réels du premier degré qui sont

$$Af_y' - \left(B'' + \sqrt{B''^2 - AA'}\right)f_x'$$

et

$$\frac{Af_y' - \left(B'' - \sqrt{B''^2 - AA'}\right)f_x'}{A}.$$

De plus D et $(AA' - B''^2)$ F ont des signes contraires, car autrement le plan

$$Af_y' - \left(B'' + \sqrt{B''^2 - AA'}\right)f_x' = 0,$$

qui passe par le centre de l'hyperboloïde, couperait la sur-

face suivant une ligne imaginaire dont l'équation serait

$$4Dz^2 + 4(AA' - B''^2)F = 0.$$

Donc le binôme

$$4Dz^2 + 4(AA' - B''^2)F$$

est aussi décomposable en deux facteurs réels du premier degré. Si, pour fixer les idées, on suppose F positif, ces facteurs seront

$$4\left[z\sqrt{D} + \sqrt{(B''^2 - AA')F}\right]$$

et

$$\left[z\sqrt{D} - \sqrt{(B''^2 - AA')F}\right].$$

De là on peut conclure qu'en nommant α, 6 deux constantes arbitraires, les génératrices rectilignes auront pour équations

$$Af_y' - \left(B'' - \sqrt{B''^2 - AA'}\right)f_x' = 4\alpha\left[\sqrt{(B''^2 - AA')F} + z\sqrt{D}\right],$$

$$\frac{Af_y' - \left(B'' - \sqrt{B''^2 - AA'}\right)f_x'}{A} = \frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{(B''^2 - AA')F} - z\sqrt{D}\right],$$

ou

$$Af_y' - \left(B'' + \sqrt{B''^2 - AA'}\right)f_x' = 46\left[\sqrt{(B''^2 - AA')F} - z\sqrt{D}\right],$$

$$\frac{Af_y' - \left(B'' - \sqrt{B''^2 - AA'}\,f_x'\right.}{A} = \frac{1}{6}\left[\sqrt{(B''^2 - AA')F} + z\sqrt{D}\right].$$

Lorsque $A = 0$, l'équation (7) devient

$$A'f_x'^2 - 2B''f_x'f_y' + 4Dz^2 - 4B''^2F = 0,$$

ou, en supposant toujours F positif,

$$f_x'[A'f_x' - 2B''f_y'] = 4\left[B''\sqrt{F} + z\sqrt{D}\right]\left[B''\sqrt{F} - z\sqrt{D}\right];$$

on en tire immédiatement les équations des génératrices rectilignes.

2°. Lorsque $B''^2 - AA' < 0$, le trinôme

$$A f_y'^2 - 2B'' f_x' f_y' + A' f_x'^2$$

n'est plus décomposable en facteurs réels du premier degré, mais on peut alors le remplacer par la somme des deux carrés

$$\frac{(A f_y' - B'' f_x')^2}{A}, \quad \frac{(AA' - B''^2) f_x'^2}{A},$$

et l'équation (7) deviendra

$$(A f_y' - B'' f_x')^2 + (AA' - B''^2) f_x'^2$$
$$+ 4 AD z^2 + 4 (AA' - B''^2) AF = 0.$$

Les deux premiers termes

$$(A f_y' - B'' f_x')^2, \quad (AA' - B''^2) f_x'^2$$

sont évidemment positifs; quant aux deux derniers $4 AD z^2, 4(AA' - B'')^2 AF$, ils doivent être négatifs puisque l'équation représente un hyperboloïde à une nappe (*). Il s'ensuit que chacune des deux expressions

$$(A f_y' - B'' f_x')^2 + 4 AD z^2$$

et

$$(AA' - B''^2) f_x'^2 + 4 (AA' - B''^2) AF$$

est décomposable en deux facteurs réels du premier degré. Cette décomposition donne, comme on sait, les équations des génératrices rectilignes.

4. *Paraboloïde hyperbolique.* Nous supposerons main-

(*) Il faut que AF soit négatif pour que le plan $z = 0$ coupe l'hyperboloïde suivant une ligne réelle, et AD doit être négatif parce que l'hyperboloïde à une nappe est une surface illimitée dans tous les sens.

tenant que l'équation générale

$$(1)\qquad \left\{ \begin{array}{l} A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' xz \\ \qquad + 2 B'' xy + 2 C x + 2 C' y + 2 C'' z + F = 0 \end{array} \right.$$

représente un paraboloïde hyperbolique. Ainsi $D = 0$, et de plus l'une des trois sections de la surface par les plans des coordonnées étant nécessairement du genre hyperbolique, l'une des trois différences $B''^2 - AA'$, $B'^2 - AA''$, $B^2 - A'A''$ sera positive. On aura, par exemple,

$$B''^2 - AA' > 0.$$

Pour déterminer dans ces deux conditions les génératrices rectilignes de la surface que l'équation (1) représente, nous allons donner une autre forme à cette équation.

Posons

$$2 C x + 2 C' y + 2 C'' z + F = \varphi$$

et désignons par F'_x, F'_y, F'_z les dérivées du polynôme homogène

$$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' xz + 2 B'' xy.$$

On aura

$$(2)\qquad F'_x = 2 A x + 2 B'' y + 2 B' z,$$

$$(3)\qquad F'_y = 2 B'' x + 2 A' y + 2 B z,$$

$$(4)\qquad F'_z = 2 B' x + 2 B y + 2 A'' z.$$

Et l'équation (1) pourra d'abord s'écrire ainsi :

$$(5)\qquad x F'_x + y F'_y + z F'_z + 2\varphi = 0.$$

Si, entre les quatre équations (2), (3), (4), (5), on

élimine x, y, F'_z en ayant égard à la condition $D = 0$, il viendra

(6) $$AF'^2_y - 2B'' F'_x F'_y + A' F'^2_x = 4(B''^2 - AA')\varphi.$$

Le premier membre de cette dernière équation se déduit immédiatement du trinôme

$$Ax^2 + 2B''xy + A'y^2$$

par l'application de la règle énoncée (n° 2, page 391); quant au second membre, on voit qu'il s'obtient en multipliant l'assemblage des termes du premier degré et du terme indépendant de l'équation proposée (1) par le quadruple de la différence $B''^2 - AA'$.

Cette différence étant positive, le trinôme

$$AF'^2_y - 2B'' F'_x F'_y + A' F'^2_x$$

est décomposable en deux facteurs *réels* du premier degré, qui sont, lorsque A n'est pas nul,

$$AF'_y - \left(B'' + \sqrt{B''^2 - AA'}\right) F'_x$$

et

$$\frac{AF'_y - \left(B'' - \sqrt{B''^2 - AA'}\right) F'_x}{A}.$$

Et, par conséquent, on a pour les équations des génératrices rectilignes :

$$AF'_y - \left(B'' + \sqrt{B''^2 - AA'}\right) F'_x = \alpha\varphi,$$

$$\frac{AF'_y - \left(B'' - \sqrt{B''^2 - AA'}\right) F'_x}{A} = \frac{4(B''^2 - AA')}{\alpha};$$

ou

$$F'_y - \left(B'' + \sqrt{B''^2 - AA'}\right) F'_x = 6(B''^2 - AA'),$$

$$\frac{AF'_y - \left(B'' - \sqrt{B''^2 - AA'}\right) F'_x}{A} = \frac{4\varphi}{6};$$

en désignant toujours par α et $\mathfrak{b}$ deux constantes arbitraires.

Lorsque

$$A = 0,$$

on a

$$AF_y'^2 - 2B'' F_x' F_y' + A' F_x'^2 = F_x' [A' F_x' - 2B'' F_y']$$

et

$$4(B''^2 - AA')\varphi = 4B''^2\varphi.$$

Les génératrices rectilignes ont alors pour équations

$$F_x' = \alpha\varphi, \quad A' F_x' - 2B'' F_y' = \frac{4B''^2}{\alpha},$$

ou

$$F_x' = 4\mathfrak{b} B''^2, \; A' F_x' - 2B'' F_y' = \frac{\varphi}{\mathfrak{b}}.$$

5. Prenons pour exemple l'équation complète

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 + 4z^2 + 2yz + 6xz + 4xy \\ \quad + 8x - 4y - 2z + 1 = 0, \end{array} \right.$$

qui représente un paraboloïde hyperbolique.

L'intersection de la surface par le plan des xy est l'hyperbole

$$x^2 - y^2 + 4xy + 8x - 4y + 1 = 0.$$

On a

$$A = 1, \quad A' = -1, \quad B'' = 2, \quad B''^2 - AA' = 5.$$

Donc, en nommant F_x', F_y' les dérivées par rapport à x et y de l'assemblage des termes du second degré de l'équation numérique proposée, cette équation pourra s'écrire ainsi

$$F_y'^2 - 4F_x' F_y' - F_x'^2 = 20.(8x - 4y - 2z + 1).$$

Le trinôme

$$F_y'^2 - 4F_x' F_y' - F_x'^2$$

est le produit des facteurs réels

$$F'_y - (2 + \sqrt{5})\, F'_x$$

et

$$F'_y - (2 - \sqrt{5})\, F'_x :$$

par conséquent, les génératrices rectilignes de la surface ont pour équations

$$F'_y - (2 - \sqrt{5})\, F'_x = \frac{20}{\alpha},$$

$$F'_y - (2 + \sqrt{5})\, F'_x = \alpha\,(8x - 4y - 2z + 1)\,;$$

ou

$$F'_y - (2 - \sqrt{5})\, F'_x = 6\,(8x - 4y - 2z + 1),$$

$$F'_y - (2 + \sqrt{5})\, F'_x = \frac{20}{6}.$$

6. Considérons encore l'équation

$$4y^2 + z^2 + 4yz + 2xz + 4xy + x - y + 3z - 2 = 0,$$

qui se rapporte de même au paraboloïde hyperbolique.

En coupant la surface par le plan des xy on obtient l'hyperbole

$$4y^2 + 4xy + x - y - 2 = 0.$$

Les coefficients A, A', B'' ont pour valeurs 0, 4, 2; d'où

$$B''^2 - AA' = 4.$$

Donc l'équation proposée revient à

$$4F'^2_x - 4F'_x F'_y = 16\,(x - y + 3z - 2)$$

ou

$$F'_x\,[F'_x - F'_y] = 4\,(x - y + 3z - 2).$$

On en conclura que les équations des génératrices rectilignes sont

$$F'_x = \alpha(x - y + 3z - 2), \quad F'_x - F'_y = \frac{4}{\alpha}$$

ou

$$F'_x = 4\beta, \quad F'_x - F'_y = \frac{1}{\beta}(x - y + 3z - 2).$$

G.

DESCRIPTION DU CADRAN SOLAIRE DE DIJON;

PAR M. ALEXIS PERRET,
Professeur à la Faculté de Dijon (*).

Ce cadran se compose :

1°. De deux dalles rectangulaires *abcd*, *cdef* chacune de 2 mètres de long, de 1 mètre de large et placées bout à bout; la ligne de contact *cd* a la direction est-ouest; la méridienne est tracée au milieu par une ligne gravée. *ab* est au côté sud et *ef* au côté nord;

2°. De vingt-quatre blocs distribués sur la circonférence d'une ellipse qui entoure les dalles et sur lesquels sont gravées les heures en chiffres romains;

3°. Enfin, de quatre blocs octogonaux placés en dehors des heures XII et VI marquant les points cardinaux par les initiales N, E, S, O. Ainsi entre N et E sont les heures I, II, III, etc., et entre E et S sont les heures VII, VIII, IX, etc.

Les douze signes du zodiaque sont gravés sur les dalles.

Les distances du milieu des lettres et des signes à la

(*) Le célèbre inventeur du système des marées souterraines. TM.

ligne inférieure *ab* sont pour

	m		m
J = Janvier ...	0,10	D = Décembre.	0,25
F = Février...	0,60	N = Novembre.	0,85
M = Mars.....	1,40	O = Octobre...	1,70
A = Avril	2,30	S = Septembre.	2,60
M = Mai......	3,15	A = Août.....	3,35
J = Juin......	3,70	J = Juillet....	3,85

pour les signes ♑ au bas, ♒ et ♐ $0^m,45$, ♓ et ♏ $1^m,05$, ♈ et ♎ 2 mètres, ♉ et ♍ $2^m,90$, ♊ et ♌ $3^m,50$ ♋ $3^m,90$.

Les signes équinoxiaux sont sur la ligne *cd*.

Quant aux blocs sur lesquels sont marquées les heures et dont les bords intérieurs sont sur une ellipse dont le demi-grand axe EO = $5^m,70$ et le demi-petit axe SN = $3^m,78$, leurs dimensions sont à peu près les mêmes. Le bord intérieur varie de $0^m,50$ et $0^m,52$, le bord externe est de $0^m,54$ et les bords latéraux de $0^m,52$.

Ces blocs ne sont pas également espacés. En mesurant l'espace qui sépare deux sommets intérieurs voisins, on trouve pour la distance de

	m
XII à XI.......	0,90
XI à X.........	0,83
X à IX.........	0,76
IX à VIII	0,71
VIII à VII......	0,60
VII à VI........	0,60
VI à V.........	0,65
V à IV.........	0,60
IV à III.......	0,60
III à II	0,81
II à I.	0,86
I à XII.........	0,90

L'autre côté n'est pas symétrique, car on trouve de XII à XI, de XI à X, de X à IX, etc., les nombres $0^m,89$, $0^m,87$, $0^m,68$, $0^m,66$, $0^m,61$, $0^m,62$, etc.

Les observateurs placent une canne verticalement sur la méridienne vis-à-vis la lettre initiale du mois dans lequel on est. L'ombre de cette canne se projette sur l'heure.

Il est bien entendu que ces dalles et ces blocs de pierre sont enfoncés dans le sol, qu'ils affleurent d'une manière peu sensible.

Quant à l'historique de ce cadran, deux mots suffisent. Il a été construit, il y a une trentaine d'années, sur le terre-plein en face de la porte Guillaume, par M. Caumont, architecte. Ce terrain ayant été bouleversé vers 1840 pour y établir le château, le cadran fut enlevé; il a été replacé, il y a deux ans, à l'extrémité de la grande allée de notre belle promenade du Parc et sur le bord de la rivière d'Ouche.

THÉORIE DU CADRAN SOLAIRE DE DIJON, SA GÉNÉRALISATION;

Par M. PEAUCELLIER.

Concevons un cercle placé dans le plan de l'équateur céleste et une droite passant par son centre et dirigée suivant l'axe du monde. Il est visible que la position du Soleil à un instant quelconque est déterminée par une droite passant par deux points : le premier situé sur l'axe du cercle et à une distance du centre égale au rayon multiplié par la tangente de la déclinaison; le second situé sur la circonférence à l'extrémité de l'arc qui répond à l'angle horaire et compté à partir du méridien.

Si l'on perspective la figure précédente d'un point pris d'une manière quelconque dans l'espace, on voit que l'ombre du style passant par ce point fixe et la perspective du point de déclinaison, passe par celle du point horaire. S'il s'agit d'un plan comme surface du cadran, les points de déclinaison sont sur une droite, perspective du trigone; les points horaires ont pour lieu une section conique. On lira l'heure par l'intersection de cette courbe avec l'ombre d'un style passant par le point fixe et le point de déclinaison correspondant à l'époque de l'année.

Dans le cas particulier où le point précédent est supposé à l'infini dans le sens vertical, la projection conique devient cylindrique et orthogonale si elle se fait sur un plan horizontal. C'est le cas du cadran de Dijon; sa ligne horaire est une ellipse dont le demi-grand axe étant égal à A, le demi-petit axe est $A \sin L$; L étant la latitude du lieu. Les points de déclinaison sont sur le petit axe dirigé suivant le méridien et distants du centre d'une quantité égale à $A \tang D \cos L$, en appelant D la déclinaison. Enfin les abscisses des points horaires situés sur l'ellipse sont représentées par $A \cos P$, P désignant l'angle horaire du Soleil.

On s'assure aisément que le coucher du Soleil répond à une normale menée à l'ellipse par le point de déclinaison.

SUR UN THÉORÈME DES NOMBRES;

Par M. LEBESGUE.

Legendre, *Théorie des Nombres*, t. II, p. 144.

A	B	C	D
E	F	G	H
I	K	L	M
N	O	P	Q

Problème. *Dans un carré divisé en seize cases suivant la figure ci-jointe, inscrire seize nombres* A, B, C,... Q, *qui satisfassent aux conditions suivantes :*

1°. Que la somme des carrés des nombres soit égale dans chacune des quatre lignes horizontales, égale aussi dans chacune des quatre lignes verticales et dans les deux diagonales, ce qui fait dix conditions;

2°. Que la somme des produits deux à deux, tels que AE, BF, CG, DH, soit nulle à l'égard des deux premières horizontales, comme à l'égard de deux horizontales quelconques, et qu'il en soit de même à l'égard de deux lignes verticales, ce qui fait douze conditions.

On aurait donc en tout vingt-deux conditions à remplir et seize inconnues seulement. Cependant Euler remarque qu'il y a une infinité de manières de satisfaire à ce problème et qu'il en possède la solution générale, et il en a donné pour exemple le carré suivant :

68,	−29,	41,	−37,
−17,	31,	79,	32,
59,	28,	−23,	61,
−11,	77,	8,	49.

L'analyse de ce problème n'a pas été publiée et il est

fort à désirer qu'elle le soit, si on peut la trouver dans les manuscrits de l'auteur non encore imprimés, car on voit qu'il serait fort difficile de la restituer.

Note de Legendre. Ce problème se trouve dans la correspondance d'Euler avec Lagrange. (*Voir* les manuscrits de Lagrange déposés à la bibliothèque de l'Institut.)

Dans le tome Ier des *Comm. arith Collectæ*, p. 427, se trouve un Mémoire intitulé : *Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile* (N. com. XV, 1770, p. 75, exhibuit 1775, Mart. 5).

Ce Mémoire renferme 16 pages in-folio. Voici la fin du Mémoire.

Solution du problème énoncé plus haut.

« Il y a ici vingt-deux conditions auxquelles il faut satisfaire. Laissant de côté celles qui concernent les diagonales, toutes les autres sont remplies par la formule générale suivante :

$$(A)\left\{\begin{array}{l|l|l|l} +ap+bq+cr+ds & +ar-bs-cp+dq & -as-br+cq+dp & +aq-bp+cs-dr \\ -aq+bp+cs-dr & +as+br+cq+dp & +ar-bs+cp-dq & +ap+bq-cr-ds \\ +ar+bs-cp-dq & -ap+bq-cr+ds & +aq+bp+cs+dr & +as-br-cq+dp \\ -as+br-cq+dp & -aq-bp+cs+dr & -ap+bq+cr-ds & +ar+bs+cp+dq \end{array}\right.$$

où la somme des carrés des nombres compris dans les colonnes, soit horizontales, soit verticales, est égale à

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2).$$

Pour que ces sommes soient égales à la somme des carrés en diagonales, il faut joindre ces deux équations

$$\begin{aligned}
&+ abpq + abrs + acpr + acqs \\
&+ adps + adqr + bcqr + bcps \\
&+ bdqs + bdpr + cdrs + cdpq = 0, \\
&- abpq - abrs + acpr + acqs \\
&- adps - adqr - bcqr - bcps \\
&+ bdqs + bdpr - cdrs - cdpq = 0,
\end{aligned}$$

d'où se tirent les deux suivantes :

$$(ac + bd)(pr + qs) = 0,$$
$$(ab + cd)(pq + rs) + (ad + bc)(ps + qr) = 0.$$

De là deux déterminations qui laissent encore six lettres arbitraires

(I) $$pr + qs = 0,$$

(II) $$\frac{a}{c} = \frac{-d(pq + rs) - b(ps + qr)}{b(pq + rs) + d(ps + qr)}.$$

» Développons un exemple en posant

$$p = 6, \quad q = 3, \quad r = 1, \quad s = -2.$$

Comme il vient

$$\frac{a}{c} = \frac{-16d + 9b}{16b - 9d},$$

soient

$$d = 0, \quad b = 1, \quad a = 9, \quad c = 16,$$

et le carré qui satisfait à toutes les conditions sera

+ 73	− 85	+ 65	− 11
− 53	+ 31	+ 107	+ 41
− 89	− 67	+ 1	− 67
− 29	− 65	− 35	+ 103

La somme des carrés en colonnes horizontales ou verticales est 16900, et si les nombres étoient divisés par 130, les sommes se réduiraient à l'unité.

» Pour ceux qui verraient avec peine la répétition des deux nombres 65 et 67, j'ajouterai un autre carré en nombres encore plus petits,

+ 68	− 29	+ 41	− 37
− 17	+ 31	+ 79	+ 32
+ 59	+ 28	− 23	+ 61
− 11	− 77	+ 8	+ 49

où la somme des quatre carrés est 8515.

» Noter que dans ces figures les quatre carrés des angles et les quatre carrés moyens produisent encore la même somme (*Com. coll.*, t. Ier, p. 441). »

A la page 450 du même volume, à propos d'une autre question d'analyse indéterminée, on lit ceci :

Non dubito fore plerosque, qui mirabuntur, me in hujusmodi quæstionibus evolvendis, quas nunc quidem summi geometræ aversari videntur, operam consumere;

verum equidem fateri cogor, me ex hujusmodi investigationibus tantumdem fere voluptatis capere, quam ex profundissimis geometriæ sublimioris speculationibus. Ac si plurimum studii et laboris impendi in quæstionibus gravioribus evolvendis, hujusmodi variatio argumenti, quandam mihi haud ingratam recreationem afferre solet. Cæterum analysis sublimior tantum debet methodo Diophanteæ, ut nefas videatur eam penitus repudiare (*).

QUESTIONS.

348. Étant donnés une conique dont les foyers sont F et F′ et un point quelconque M dans l'intérieur de cette conique; si l'on mène MF rencontrant la conique en A et B et MF′ rencontrant la conique en C et D, on aura

$$\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}=\frac{1}{MC}+\frac{1}{MD}.$$

Lorsque le point M est extérieur, les sommes sont remplacées par des différences. (Mannheim.)

349. Si une équation du troisième degré et sa dérivée ont toutes leurs racines rationnelles, les racines a, b, c de la première équation seront données par les formules

$$a=m+h,\quad b=mu^2+h,\quad c=2mu+h,$$

m, h et u étant des nombres rationnels. (Prouhet.)

350. Etant donnée une fonction homogène *complète* de degré p entre n variables, racines d'une équation de degré n également donnée, les coefficients numériques de la fonction étant tous égaux à l'unité; trouver la valeur de la fonction exprimée en fonction des coefficients de l'équation. (Wronski.)

(*) Réflexions à méditer par certains géomètres. Tm.

SOLUTION DE LA QUESTION IX.

(voir p. 258) ;

PAR M. MORIN,
Ancien notaire (*).

Prenons $\left(\frac{1}{n}\right)^{\text{ième}}$ d'année pour unité de temps. On a, d'après la formule connue et conservant la notation adoptée (p. 258) :

1°.

$$a\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = b\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n-1} + \left(1+\frac{r}{n}\right)^{n-2} + \ldots + \left(1+\frac{r}{n}\right) + 1\right].$$

$$b = \frac{ar\left(1+\frac{r}{n}\right)^n}{n\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1\right]}.$$

2°

$$\frac{nb}{a} = \frac{r\left(1+\frac{r}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1}.$$

3°.

$$\text{limite}\,\frac{nb}{a} = \frac{re^r}{e^r - 1}.$$

4°. La dérivée de cette fonction est positive ; ainsi elle croît avec r.

(*) Il s'est glissé une faute typographique. Il faut lire $\frac{r}{n}$ au lieu de $\frac{z}{n}$.

5°. La limite pour $r = 0$ est

$$\frac{e^r + re^r}{e^r} = 1 + r = 1.$$

NOUVEAUX THÉORÈMES SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR ÉMILE MATHIEU,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Supposons donnée une équation algébrique de degré m, $u = 0$ ou $F(x) = 0$, et donnons à la variable x des valeurs croissant en progression par différence dont la raison soit h

$$\ldots,\ x_0 - 2h,\ x_0 - h,\ x_0,\ x_0 + h, \ldots,\ x_0 + mh, \ldots.$$

Le polynôme $F(x)$ prendra les valeurs

$$\ldots,\ u_{-2},\ u_{-1},\ u_0,\ u_1, \ldots,\ u_m, \ldots.$$

Formons ensuite les différences premières, deuxièmes, troisièmes,..., $m^{ièmes}$ correspondantes aux valeurs que prend $F(x)$, l'objet principal de ce Mémoire est de démontrer que :

1°. L'équation

$$F(x) = 0$$

n'a pas plus de racines plus grandes que x_0, que la suite

$$u_0,\ \Delta u_{-1},\ \Delta^2 u_{-2}, \ldots,\ \Delta^m u_{-m}$$

n'a de variations. Si le nombre des variations est plus grand que ce nombre de racines, la différence de ces nombres est un nombre pair.

2°. L'équation

$$F(x) = 0$$

n'a pas plus de racines plus petites que x_0, que la suite

$$u_0,\ -\Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ -\Delta^3 u_0, \ldots,\ \pm \Delta^m u_0$$

n'a de variations. Si le nombre des variations est plus grand que ce nombre de racines, la différence de ces nombres est un nombre pair.

Je déduirai aussi de la théorie des différences le théorème de Budan, et je montrerai qu'avec les différences on peut résoudre le même problème qu'avec les dérivées qui entrent dans le théorème de Budan.

INTRODUCTION.

I. Indiquons une fois pour toutes les notations que nous emploierons.

Le polynôme algébrique que nous considérerons dans tout ce Mémoire sera du $m^{ième}$ degré et sera appelé tantôt u, tantôt $F(x)$.

Les dérivées premières, deuxièmes,..., $m^{ièmes}$ de ce polynôme seront ainsi désignées

$$F'(x),\ F''(x), \ldots,\ F^{(m)}(x).$$

Substituons dans le polynôme $F(x)$ les termes de la progression suivante par différence dont la raison est h :

$$\ldots,\ x_0 - 2h,\ x_0 - h,\ x_0,\ x_0 + h, \ldots,\ x_0 + ph, \ldots,$$

le polynôme $F(x)$ prendra les valeurs

$$\ldots,\quad F(x_0 - 2h),\ F(x_0 - h),\ F(x_0),\ F(x_0 + h), \ldots,$$
$$F(x_0 + ph), \ldots,$$

que nous désignerons aussi par les notations

$$\ldots,\ u_{-2},\ u_{-1},\ u_0,\ u_1,\ldots,\ u_p,\ldots.$$

Ainsi

$$u_p = \mathrm{F}(x_0 + ph)$$

et

$$u_{-p} = \mathrm{F}(x_0 - ph).$$

Formons les différences premières des termes de la suite

$$\ldots,\ u_{-2},\ u_{-1},\ u_0,\ldots,\ u_p,\ldots;$$

nous les écrirons ainsi

$$\ldots,\quad u_0 - u_{-1} = \Delta u_{-1},\quad u_1 - u_0 = \Delta u_0,\ldots,$$
$$u_{p+1} - u_p = \Delta u_p\ldots.$$

Ainsi en général

$$\Delta u_p = u_{p+1} - u_p$$

et

$$\Delta u_{-p} = u_{-p+1} - u_{-p};$$

de même

$$\Delta^2 u_p = \Delta u_{p+1} - \Delta u_p$$

et

$$\Delta^2 u_{-p} = \Delta u_{-p+1} - \Delta u_{-p};$$

et ainsi de suite.

Nous aurons souvent à considérer les deux suites

$$u_0,\ \Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ \ldots,\ \Delta^m u_0$$

et

$$u_0,\ \Delta u_{-1},\ \Delta^2 u_{-2},\ldots,\ \Delta^m u_{-m}.$$

Les termes de la première suite sont donnés par les formules

$$\Delta u_0 = \mathrm{F}(x_0 + h) - \mathrm{F}(x_0) = \theta(x_0),$$
$$\Delta^2 u_0 = \theta(x_0 + h) - \theta(x_0) = \chi(x_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et les termes de la deuxième suite sont donnés par les formules

$$\Delta u_{-1} = \mathrm{F}(x_0) - \mathrm{F}(x_0 - h) = \varphi(x_0),$$
$$\Delta^2 u_{-2} = \varphi(x_0) - \varphi(x_0 - h) = \psi(x_0),$$
$$\Delta^3 u_{-3} = \psi(x_0) - \psi(x_0 - h) = \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

II. Rappelons les formules

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \dfrac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots \\ \qquad + \dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}\Delta^m u_0, \end{cases}$$

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} \Delta^n u_0 = u_n - nu_{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{1.2}u_{n-2} + \ldots \\ \qquad \pm \dfrac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p}u_{n-p}\ldots \pm u_0, \end{cases}$$

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} u = u_0 + \left(\dfrac{x-x_0}{h}\right)\Delta u_0 \\ \qquad + \left(\dfrac{x-x_0}{h}\right)\left(\dfrac{x-x_0}{h} - 1\right)\dfrac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \ldots \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + \left(\dfrac{x-x_0}{h}\right)\left(\dfrac{x-x_0}{h} - 1\right)\ldots\left(\dfrac{x-x_0}{h} - m + 1\right)\dfrac{\Delta^m u_0}{1.2.3\ldots m} \end{cases}$$

III. u est aussi donné par la formule

$$\text{(D)} \quad \begin{cases} u = u_0 + \left(\dfrac{x-x_0}{h}\right)\Delta u_{-1} \\ \qquad + \left(\dfrac{x-x_0}{h}\right)\left(\dfrac{x-x_0}{h} + 1\right)\dfrac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2} + \ldots \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + \left(\dfrac{x-x_0}{h}\right)\left(\dfrac{x-x_0}{h} + 1\right)\ldots\left(\dfrac{x-x_0}{h} + m - 1\right)\dfrac{\Delta^m u_{-m}}{1.2.3\ldots m} \end{cases}$$

Pour démontrer cette formule, on démontrera d'abord la généralité de celle-ci :

$$u_n = u_0 + n\,\Delta u_{-1} + \frac{n(n+1)}{1.2}\Delta^2 u_{-2} + \ldots$$
$$+ \frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{1.2.3\ldots p}\Delta^p u_{-p} + \ldots.$$

Cette formule peut être écrite symboliquement

$$u_n = (1 - \Delta u^{-1})^{-n},$$

et pourra se démontrer d'une manière tout à fait analogue à la formule (A). Cette formule démontrée, on en déduira la formule (D) de la même manière qu'on a déduit la formule (C) de la formule (A).

IV. Etant donné le polynôme $F(x)$, proposons-nous d'exprimer les dérivées

$$F'(x_0),\ F''(x_0), \ldots,\ F^{(m)}(x_0)$$

en fonction des différences

$$\Delta u_{-1},\ \Delta^2 u_{-2}, \ldots,\ \Delta^m u_{-m}.$$

Nous avons

$$\text{(M)} \qquad F(x + x_0) = F(x_0) + x F'(x_0) + \frac{x^2}{1.2} F''(x_0) + \ldots.$$

Nous avons aussi

$$F(x) = F(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\Delta u_{-1}$$
$$+ \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} + 1\right)\frac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2} + \ldots.$$

Soit changé dans cette formule x en $x + x_0$, il vient

$$F(x + x_0) = F(x_0) + \frac{x}{h}\Delta u_{-1} + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} + 1\right)\frac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2}$$
$$+ \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} + 1\right)\left(\frac{x}{h} + 2\right)\frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} + \ldots.$$

Ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x, nous avons

$$
(\mathrm{N})\quad \left\{
\begin{aligned}
&F(x+x_0) = F(x_0) \\
&+\frac{x}{h}\left(\frac{\Delta u_{-1}}{1}+\frac{\Delta^2 u_{-2}}{2}+\frac{\Delta^3 u_{-3}}{3}+\ldots+\frac{\Delta^m u_{-m}}{m}\right) \\
&+\frac{x^2}{h^2}\left[\begin{aligned}&\frac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2}+(1+2)\frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3}\\ &+(1.2+1.3+2.3)\frac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4}+\ldots\end{aligned}\right] \\
&+\frac{x^3}{h^3}\left[\begin{aligned}&\frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3}+(1+2+3)\frac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4}\\ &+\left(\begin{matrix}1.2+1.3+1.4\\+2.3+2.4+3.4\end{matrix}\right)\frac{\Delta^5 u_{-5}}{1.2.3.4.5}+\ldots\end{aligned}\right]. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.
$$

En égalant les coefficients des termes de même degré dans les expressions (M) et (N) de $F(x+x_0)$, il vient

$$h\,F'(x_0) = \frac{\Delta u_{-1}}{1}+\frac{\Delta^2 u_{-2}}{2}+\frac{\Delta^3 u_{-3}}{3}+\ldots+\frac{\Delta^m u_{-m}}{m},$$

$$\frac{h^2 F''(x_0)}{1.2} = \frac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2}+(1+2)\frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} + (1.2+1.3+2.3)\frac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4}+\ldots,$$

$$\frac{h^3 F'''(x_0)}{1.2.3} = \frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3}+(1+2+3)\frac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4} + \left(\begin{matrix}1.2+1.3+1.4\\+2.3+2.4+3.4\end{matrix}\right)\frac{\Delta^5 u_{-5}}{1.2.3.4.5}+\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous pouvons maintenant procéder à la démonstration des théorèmes qui font l'objet de ce Mémoire.

Proposition I.

Théorème.

La suite

$$u_0,\ \Delta u_{-1},\ \Delta^2 u_{-2},\ \ldots,\ \Delta^m u_{-m}$$

a au moins autant de variations que la suite

$$\mathrm{F}(x_0),\ \mathrm{F}'(x_0),\ \mathrm{F}''(x_0),\ \ldots,\ \mathrm{F}^{(m)}(x_0).$$

Si le nombre des variations de la première suite est plus grand que le nombre des variations de la deuxième, la différence de ces deux nombres est un nombre pair.

Nous commencerons par établir deux lemmes.

Lemme I. — A, B, C,..., T, U étant des nombres quelconques positifs ou négatifs, la suite

$$\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \ldots,\ \mathrm{T},\ \mathrm{U}$$

a au moins autant de variations que la suite

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\ldots+\mathrm{T}+\mathrm{U},\quad \mathrm{B}+\mathrm{C}+\ldots+\mathrm{U},\ \ldots,\ \mathrm{T}+\mathrm{U},\ \mathrm{U},$$

que nous appellerons *suite dérivée de la première.*

En effet, posons

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\ldots+\mathrm{T}+\mathrm{U}+\alpha=0.$$

Le polynôme

(1) $$\mathrm{U}x^m+\mathrm{T}x^{m-1}+\ldots+\mathrm{B}x^2+\mathrm{A}x+\alpha$$

sera divisible par $x-1$, et le quotient de ce polynôme par $x-1$ sera

(2) $$\begin{array}{l|l|l} \mathrm{U}x^{m-1} + \mathrm{U} & x^{m-2} + \ldots + \mathrm{U} & x + \mathrm{U} \\ \qquad\quad + \mathrm{T} & \qquad\qquad + \mathrm{T} & \quad + \mathrm{T} \\ & \qquad\qquad \ldots & \quad \ldots \\ & \qquad\qquad + \mathrm{B} & \quad + \mathrm{B} \\ & & \quad + \mathrm{A} \end{array}$$

Si l'on multiplie le polynôme (2) par $x - 1$, on aura le polynôme (1); donc le polynôme (1) a au moins une variation de plus que le polynôme (2). Donc dans le cas le plus défavorable où α serait de signe contraire à A, la suite

$$A,\ B,\ C, \ldots,\ U$$

aura au moins autant de variations que sa suite dérivée.

Lemme II. — Soit la suite composée de m termes

$$(a) \qquad A,\ B,\ C, \ldots,\ I,\ K,\ \ldots,\ T,\ U$$

et sa suite dérivée

$$(b) \qquad \begin{cases} A + B + \ldots + U, \ldots, & I + K + \ldots + U, \\ K + L + \ldots + U, \ldots, & T + U,\ U; \end{cases}$$

je pose la suite

$$(c) \qquad A,\ B, \ldots,\ I,\ K + L + \ldots + U, \ldots,\ T + U,\ U,$$

formée des n premiers termes de la suite (a) et des $m - n$ derniers termes de la suite (b), et je dis que la suite (a) a au moins autant de variations que la suite (c).

En effet, soit s le nombre des variations de la suite

$$A,\ B,\ C, \ldots,\ I,\ K,$$

et t le nombre des variations de la suite

$$K, \ldots,\ T,\ U;$$

la suite (a) aura $s + t$ variations. D'après le lemme I, la suite

$$K + L + \ldots + U,\ \ldots,\ T + U,\ U$$

n'a pas plus de t variations. Alors considérons les deux hypothèses :

1°. Si les quantités K et $K + L + \ldots + U$ sont de

même signe, la suite

$$A,\ B,\ C,\ldots,\ I,\ K$$

a le même nombre de variations que la suite

$$A,\ B,\ C,\ldots,\ I,\ K+T+\ldots+U;$$

donc la suite (c) n'a pas plus de $s+t$ variations.

2°. Si K et $K+L+\ldots+U$ sont de signe contraire, la suite

$$K+L+\ldots+U,\ldots,\ L+U,\ U$$

ne peut pas avoir t variations, elle en a au plus $t-1$, la suite

$$A,\ B,\ldots,\ I,\ K+L+\ldots+U$$

aura $s-1$ ou $s+1$ variations. Donc la suite (c) n'a pas plus de $(s+1)+(t-1)$ variations ou $s+t$ variations, et le lemme est démontré.

Ces deux lemmes établis, démontrons la proposition qui nous occupe sur un polynôme d'un degré déterminé, le quatrième par exemple; il sera facile de reconnaître que la démonstration s'étend à un polynôme d'un degré quelconque.

Multiplions Δu_{-1}, $\Delta^2 u_{-2}$, $\Delta^3 u_{-3}$, $\Delta^4 u_{-4}$ par les nombres $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ et écrivons la suite

$$(A)\qquad u_0,\quad \frac{\Delta u_{-1}}{1},\quad \frac{\Delta^2 u_{-2}}{2},\quad \frac{\Delta^3 u_{-3}}{3},\quad \frac{\Delta^4 u_{-4}}{4}.$$

Formons les quatre derniers termes de la suite dérivée de la suite (A), et les plaçant sous les termes de même ordre de la suite (A), nous avons le tableau

u_0	$\frac{\Delta u_{-1}}{1}$	$\frac{\Delta^2 u_{-2}}{2}$	$\frac{\Delta^3 u_{-3}}{3}$	$\frac{\Delta^4 u_{-4}}{4}$
	$\frac{\Delta u_{-1}}{1}+\frac{\Delta^2 u_{-2}}{2}+\frac{\Delta^3 u_{-3}}{3}+\frac{\Delta^4 u_{-4}}{4}$	$\frac{\Delta^2 u_{-2}}{2}+\frac{\Delta^3 u_{-3}}{3}+\frac{\Delta^4 u_{-4}}{4}$	$\frac{\Delta^3 u_{-3}}{3}+\frac{\Delta^4 u_{-4}}{4}$	$\frac{\Delta^4 u_{-4}}{4}$

Il est évident que la suite

$$(1) \qquad u_0,\ \Delta u_{-1},\ \Delta^2 u_{-2},\ \Delta^3 u_{-3},\ \Delta^4 u_{-4}$$

présente le même nombre de variations que la suite (A); donc, d'après le lemme II, la suite (1) a au moins autant de variations que la suite

$$u_0, \quad \frac{\Delta u_{-1}}{1} + \frac{\Delta^2 u_{-2}}{2} + \frac{\Delta^3 u_{-3}}{3} + \frac{\Delta^4 u_{-4}}{4},$$

$$\frac{\Delta^2 u_{-2}}{2} + \frac{\Delta^3 u_{-3}}{3} + \frac{\Delta^4 u_{-4}}{4}, \quad \frac{\Delta^3 u_{-3}}{3} + \frac{\Delta^4 u_{-4}}{4}, \quad \frac{\Delta^4 u_{-4}}{4}.$$

Multiplions les trois derniers termes de cette suite respectivement par $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ et remarquant que l'on a

$$\frac{\Delta u_{-1}}{1} + \frac{\Delta^2 u_{-2}}{2} + \frac{\Delta^3 u_{-3}}{3} + \frac{\Delta^4 u_{-4}}{4} = h\,\mathrm{F}'(x_0),$$

nous aurons cette autre suite

$$(\mathrm{B}) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0, \quad h\,\mathrm{F}'(x_0), \quad \dfrac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2} + \dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{1.3} + \dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{1.4}, \\ \qquad\qquad \dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{2.3} + \dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{2.4}, \quad \dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{3.4}. \end{array} \right.$$

Formons les trois derniers termes de la suite dérivée de la suite (B), et les plaçant sous les termes de même ordre de la suite (B), nous aurons le tableau

$$\begin{array}{l|l|l|l} u_0 \quad h\,\mathrm{F}'(x_0) & \dfrac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2} + \dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{1.3} + \dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{1.4} & \dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{2.3} + \dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{2.4} & \dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{3.4} \\ & \dfrac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2} + (2+1)\dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} + (2.3+1.3+1.2)\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4} & \dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{2.3} + (3+2)\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{2.3.4} & \dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{3.4} \end{array}$$

Remarquons que l'on a

$$\frac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2} + (2+1)\frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} + (2.3 + 1.3 + 1.2)\frac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4} = \frac{h^2\mathrm{F}''(x_0)}{1.2};$$

Donc, d'après le lemme II, la suite (B) et à fortiori la suite (1) ont au moins autant de variations que la suite

$$
(\mathrm{C}) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0, \quad \dfrac{h\,\mathrm{F}'(x_0)}{1}, \quad \dfrac{h^2\,\mathrm{F}''(x_0)}{1.2}, \\[2ex] \dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{2.3} + (3+2)\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{2.3.4}, \qquad \dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{3.4}. \end{array} \right.
$$

Multiplions les deux derniers termes de la suite (C) par $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, et agissant comme précédemment, nous formons le tableau

u_0	$h\,\mathrm{F}'(x_0)$	$\dfrac{h^2\,\mathrm{F}''(x_0)}{1.2}$	$\dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} + (3+2)\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4}$	$\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{2.3.4}$
			$\dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} + (3+2+1)\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4}$	$\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{2.3.4}$

Or on a

$$
\frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} + (3+2+1)\frac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4} = \frac{h^3\,\mathrm{F}'''(x_0)}{1.2.3},
$$

$$
\frac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4} = \frac{h^4\,\mathrm{F}^{\mathrm{IV}}(x_0)}{1.2.3.4}.
$$

Donc la suite (C) et à fortiori la suite (B) et la suite (1) ont au moins autant de variations que la suite

$$
u_0, \quad \frac{h\,\mathrm{F}'(x_0)}{1}, \quad \frac{h^2\mathrm{F}''(x_0)}{1.2}, \quad \frac{h^3\,\mathrm{F}'''(x_0)}{1.2.3}, \quad \frac{h^4\,\mathrm{F}^{\mathrm{IV}}(x_0)}{1.2.3.4}.
$$

Donc enfin la suite

$$
u_0, \quad \Delta u_{-1}, \quad \Delta^2 u_{-2}, \quad \Delta^3 u_{-3}, \quad \Delta^4 u_{-4}
$$

a au moins autant de variations que la suite

$$
\mathrm{F}(x_0), \quad \mathrm{F}'(x_0), \quad \mathrm{F}''(x_0), \quad \mathrm{F}'''(x_0), \quad \mathrm{F}^{\mathrm{IV}}(x_0).
$$

De plus, si le nombre de variations de la première suite est plus grand que le nombre de variations de la deuxième, la différence de ces deux nombres est un nombre pair. Car ces deux suites commencent et finissent par le même signe.

Proposition II.

Théorème.

L'équation

$$F(x) = 0$$

n'a pas plus de racines plus grandes que x_0, que la suite

$$u_0, \ \Delta u_{-1}, \ \Delta^2 u_{-2}, \ldots, \ \Delta^m u_{-m}$$

n'a de variations. Si ce nombre de variations est plus grand que ce nombre de racines, leur différence est un nombre pair.

Soient ν le nombre des variations de la suite

$$u_0, \ \Delta u_{-1}, \ldots, \ \Delta^m u_{-m},$$

ν' celui des variations de la suite

$$F(x_0), \ F'(x_0), \ldots, \ F^{(m)}(x_0),$$

r le nombre des racines plus grandes que x_0. On aura

$$F(x + x_0) = F(x_0) + x F'(x_0) + \frac{x^2}{1.2} F''(x_0) + \ldots.$$

D'après le théorème de Descartes,

$$F(x + x_0) = 0$$

n'a pas plus de racines positives, que la suite

$$F(x_0), \ F'(x_0), \ldots, \ F^{(m)}(x_0)$$

n'a de variations ; donc

$$F(x) = 0$$

n'a pas plus de racines plus grandes que x_0, que la suite

$$F(x_0),\ F'(x_0), \ldots,\ F^{(m)}(x_0)$$

n'a de variations, et, d'après le même théorème, $\nu' - r$ est un nombre pair. D'après le théorème précédent, ν n'est pas plus petit que ν'; donc l'équation

$$F(x) = 0$$

n'a pas plus de racines plus grandes que x_0, que la suite

$$u_0,\ \Delta u_{-1}, \ldots,\ \Delta^m u_{-m}$$

n'a de variations. De plus, si ce nombre de variations est plus grand que ce nombre de racines, leur différence est un nombre pair. Car nous venons de remarquer que $\nu' - r$ est un nombre pair; d'après le théorème précédent $\nu - \nu'$ est un nombre pair, donc la somme de ces deux nombres $\nu - r$ est un nombre pair.

Proposition III.

Théorème.

La suite

$$u_0,\ \Delta u_0,\ \Delta^2 u_0, \ldots,\ \Delta^m u_0$$

a au moins autant de permanences que la suite

$$F(x_0),\ F'(x_0), \ldots,\ F^{(m)}(x_0).$$

En effet, posons

$$F(x) = f(x - x_0),$$

nous aurons

$$f(x - x_0) = u_0 + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\Delta u_0 + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \ldots.$$

Changeons $x - x_0$ en $-x + x_0$, nous aurons

$$f(-x + x_0) = u_0 - \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\Delta u_0$$
$$+ \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} + 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} - \ldots$$

Soient $\Delta' u_{-1}$, $\Delta'^2 u_{-2}, \ldots, \Delta'^m u_{-m}$ les différences de la fonction $f(-x + x_0)$ analogues aux différences Δu_{-1}, $\Delta^2 u_{-2}, \ldots, \Delta^m u_{-m}$ de la fonction $f(x - x_0)$, il viendra

$$f(-x + x_0) = u_0 + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\Delta' u_{-1}$$
$$+ \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} + 1\right)\frac{\Delta'^2 u_{-2}}{1.2} + \ldots$$

En comparant ces deux expressions de $f(-x + x_0)$, j'aurai

$$\Delta' u_{-1} = -\Delta u_0, \quad \Delta'^2 u_{-2} = \Delta^2 u_0, \quad \Delta'^3 u_{-3} = -\Delta^3 u_0, \ldots .$$

Or la suite

$$u_0, \ \Delta' u_{-1}, \ \Delta'^2 u_{-2}, \ \Delta'^3 u_{-3}, \ldots$$

a au moins autant de variations que la suite

$$f(0), \ -f'(0), \ f''(0), \ -f'''(0), \ldots, \ \pm f^{(m)}(0).$$

Donc la suite

$$(a) \qquad u_0, \ -\Delta u_0, \ \Delta^2 u_0, \ -\Delta^3 u_0, \ldots \ \pm \Delta^m u_0$$

a au moins autant de variations que la suite

$$(b) \qquad F(x_0), \ -F'(x_0), \ F''(x_0), \ldots, \ \pm F^{(m)}(x_0).$$

Alors, si aucun terme n'est nul ni dans la suite (a) ni dans la suite (b), il est clair que la suite

$$u_0, \ \Delta u_0, \ \Delta^2 u_0, \ldots, \ \Delta^m u_0$$

a au moins autant de permanences que la suite

$$F(x_0),\ F'(x_0),\ F''(x_0),\ldots,\ F^{(m)}(x_0).$$

Si quelques termes étaient nuls, on remplacerait dans les suites (a) et (b) ces termes nuls par des signes, de manière à avoir le plus de permanences possibles, ce qui ne changerait pas le nombre de variations de ces deux suites, et alors il est clair que la suite

$$u_0,\ \Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ldots,\ \Delta^m u_0$$

a au moins autant de permanences que la suite

$$F(x_0),\ F'(x_0),\ldots,\ F^{(m)}(x_0),$$

après que l'on a remplacé les termes nuls par des signes de manière à avoir le plus de variations possibles.

Proposition IV.
Théorème.

L'équation

$$F(x)=0$$

n'a pas plus de racines plus petites que x_0, que la suite

$$u_0,\ -\Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ -\Delta^3 u_0,\ldots$$

n'a de variations. Si le nombre des variations est plus grand que ce nombre de racines, leur différence est un nombre pair.

Considérons comme dans le théorème précédent l'équation

$$f(-x+x_0)=0.$$

D'après la proposition II, l'équation

$$f(-x+x_0)=0$$

n'a pas plus de racines plus grandes que x_0, que la suite

$$u_0, \quad \Delta' u_{-1}, \quad \Delta'^2 u_{-2}, \ldots$$

n'a de variations. Si ce nombre de variations est plus grand que ce nombre de racines, leur différence est un nombre pair.

Or il est clair que l'équation

$$f(-x+x_0)=0$$

a autant de racines plus grandes que x_0, que l'équation

$$f(x-x_0)=0$$

ou

$$F(x)=0$$

a de racines plus petites que x_0, et la suite

$$u_0, \quad \Delta' u_{-1}, \quad \Delta'^2 u_{-2}, \ldots$$

n'est autre que la suite

$$u_0, \quad -\Delta u_0, \quad \Delta^2 u_0, \quad -\Delta^3 u_0, \ldots.$$

Donc la proposition est démontrée.

Proposition V.

Théorème de Budan.

Etant donnée une équation

$$F(x)=0$$

de degré m, si a est plus grand que b, la différence entre le nombre des variations des deux suites

$$F(a), \quad F'(a), \quad F''(a), \ldots, \quad F^{(m)}(a),$$
$$F(b), \quad F'(b), \quad F''(b), \ldots, \quad F^{(m)}(b),$$

n'est pas plus petite que le nombre des racines comprises

entre a et b. Si le premier nombre est plus grand que le second, leur différence est un nombre pair.

Soit θ la différence $b - a$, posons

$$\theta = nh,$$

n étant un nombre entier; afin de ne pas contrarier nos notations, posons aussi

$$a = x_0,$$

et substituons dans $F(x)$ les nombres croissant en progression par différence

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \ldots,$$
$$x_n = b = x_0 + nh.$$

Supposons h assez petit pour que deux racines consécutives de l'équation

$$F(x) = 0$$

diffèrent de plus de h; il y aura au plus une racine comprise entre deux termes consécutifs quelconques de cette progression par différence.

Formons ensuite les différences premières, deuxièmes, troisièmes, etc., et disposons-les ainsi :

x_0	u_0	Δu_{-1}	$\Delta^2 u_{-2}$	......	$\Delta^{m-1} u_{-(m-1)}$	$\Delta^m u_{-m}$
x_1	u_1	Δu_0	$\Delta^2 u_{-1}$	......	$\Delta^{m-1} u_{-(m-2)}$	$\Delta^m u_{-(m-1)}$
....	....	.....	......	......	....	....
x_p	u_p	Δu_{p-1}	$\Delta^2 u_{p-2}$	......	$\Delta^{m-1} u_{p-m+1}$	$\Delta^m u_{p-m}$
x_{p+1}	u_{p+1}	Δu_p	$\Delta^2 u_{p-1}$	......	$\Delta^{m-1} u_{p-m+2}$	$\Delta^m u_{p-m+1}$
....	....	.....	......	......	....	....
x_n	u_n	Δu_{n-1}	$\Delta^2 u_{n-2}$	......	$\Delta^{m-1} u_{n-m+1}$	$\Delta^m u_{n-m}$

J'appellerai suite (x_0) l'ensemble des termes formé par

la première ligne horizontale, suite (x_1) celui des termes formé par la deuxième, et ainsi de suite.

Il est facile de reconnaître que chacune de ces suites est la suite dérivée de la précédente; par conséquent (proposition I, lemme I) la suite (x_{p+1}) a au plus autant de variations que la suite (x_p). Désignons par ν_p le nombre des variations de la suite (x_p) et par ν_{p+1} celui de la suite (x_{p+1}), nous aurons

$$\nu_p - \nu_{p+1} \geqq 0.$$

S'il y avait une racine entre x_p et x_{p+1}, u_p et u_{p+1} seraient de signe contraire: donc la suite (x_p) et la suite (x_{p+1}), commençant par des signes contraires et finissant par le même signe, on ne pourrait avoir

$$\nu_p - \nu_{p+1} = 0,$$

donc on aurait

$$\nu_p - \nu_{p+1} \geqq 1.$$

Soit μ le nombre des racines comprises entre a et b et supposons que la première soit comprise entre x_k et x_{k+1}, la deuxième entre x_r et $x_{r+1}, \ldots$, la $\mu^{ième}$ entre x_t et x_{t+1}; nous aurons

$$\nu_0 - \nu_1 \geqq 0, \quad \nu_1 - \nu_2 \geqq 0, \ldots, \quad \nu_k - \nu_{k+1} \geqq 1, \ldots,$$
$$\nu_t - \nu_{t+1} \geqq 1, \ldots, \quad \nu_{n-1} - \nu_n \geqq 0.$$

En ajoutant ces égalités et inégalités membre à membre, nous aurons

$$\nu_0 - \nu_n \geqq \mu.$$

Or nous avons

$$\Delta u_{p-1} = \mathrm{F}(x_p) - \mathrm{F}(x_p - h)$$
$$= h\mathrm{F}'(x_p) - \frac{h^2}{1.2}\mathrm{F}''(x_p) + \ldots = \varphi(x_p),$$

$$\Delta^2 u_{p-2} = \varphi(x_p) - \varphi(x_p - h)$$

$$= h\varphi'(x_p) - \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x_p) + \ldots = h^2 F''(x_p) - \ldots = \psi(x_p),$$

. . . .

Nous pouvons écrire ainsi les valeurs de ces différences :

$$\Delta u_{p-1} = h\,[F'(x_p) + h\rho],$$
$$\Delta^2 u_{p-2} = h^2[F''(x_p) + h\sigma],$$
$$\Delta^3 u_{p-3} = h^3[F'''(x_p) + h\tau],$$
. . . .

Donc si nous supposons h suffisamment petit, Δu_{p-1}, $\Delta^2 u_{p-2}, \ldots, \Delta^m u_{p-m}$ seront de même signe que $F'(x_p)$, $F''(x_p), \ldots, F^{(m)}(x_p)$. Donc aussi, en supposant h suffisamment petit, ν_0 sera le nombre de variations de la suite

$$F(x_0),\ F'(x_0), \ldots,\ F^{(m)}(x_0),$$

et ν_n le nombre des variations de la suite

$$F(x_n),\ F'(x_n), \ldots,\ F^{(m)}(x_n).$$

Donc enfin la différence entre le nombre des variations des deux suites

(1) $\qquad F(a),\ F'(a),\ F''(a), \ldots,\ F^{(m)}(a),$

(2) $\qquad F(b),\ F'(b),\ F''(b), \ldots,\ F^{(m)}(b),$

n'est pas plus petite que le nombre des racines comprises entre a et b.

De plus, si le nombre des variations de la première suite est plus grand que le nombre des variations de la deuxième, la différence de ces deux nombres est un nombre pair.

En effet, remarquons que

$$F^{(m)}(a) = F^{(m)}(b),$$

D'après cela, si le nombre μ des racines comprises entre a et b est pair, $F(a)$ et $F(b)$ seront de même signe; et les suites (1) et (2) commenceront et finiront par le même signe; donc $\nu_0 - \nu_n$ est pair, donc enfin $\nu_0 - \nu_n - \mu$ est un nombre pair.

On voit de même que si μ est impair, $\nu_0 - \nu_n$ est un nombre impair, et $\nu_0 - \nu_n - \mu$ est un nombre pair.

Dans la démonstration précédente, on n'a supposé nulle aucune dérivée de $F(x)$ pour $x = a$ et $x = b$. Supposons maintenant que dans la suite

$$F(a),\ F'(a), \ldots,\ F^{(n-1)}(a),\ F^{(n)}(a), \ldots,$$
$$F^{(n-p)}(a),\ F^{(n-p+1)}(a), \ldots,\ F^{(m)}(a),$$

tous les termes compris entre $F^{(n-1)}(a)$ et $F^{(n-p+1)}(a)$ s'annulent. Au lieu de substituer a dans la suite

$$F(x),\ F'(x), \ldots,\ F^{(n-1)}(x),\ F^{(n)}(x), \ldots,$$
$$F^{(n-p)}(x),\ F^{(n-p+1)}(x), \ldots,\ F^{(m)}(x),$$

on substituera $a - h$ et $a + h$, et si l'on suppose h suffisamment petit, les signes de cette suite ne pourront être altérés dans le passage de $x = a - h$ à $x = a + h$ que dans la partie qui se trouve entre $F^{(n-1)}(x)$ et $F^{(n-p+1)}(x)$. Il suffira donc de comparer les signes des deux suites

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} F^{(n-1)}(a-h),\ F^{(n)}(a-h),\ F^{(n+1)}(a-h), \ldots, \\ \qquad\qquad F^{(n-p+1)}(a-h), \end{array} \right.$$

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{l} F^{(n-1)}(a+h),\ F^{(n)}(a+h),\ F^{(n+1)}(a+h), \ldots, \\ \qquad\qquad F^{(n-p+1)}(a+h). \end{array} \right.$$

En développant ces fonctions, il sera facile de reconnaître que $F^{(n)}(a+h)$, $F^{(n+1)}(a+h)$,..., $F^{(n-p)}(a+h)$ sont tous de même signe que $F^{(n-p+1)}(a)$ si h est suffisamment petit. On reconnaîtra aussi que si h est suffisamment petit, $F^{(n-p)}(a-h)$ est de signe contraire à $F^{(n-p+1)}(a)$,

$F^{(n-p-1)}(a-h)$ est de même signe, $F^{(n-p-2)}(a-h)$ de signe contraire, et ainsi de suite.

Nous ne nous arrêterons pas davantage sur ce cas particulier; nous nous bornerons à dire que si la suite (3) a u variations de plus que la suite (4), l'équation

$$F(x) = 0$$

a u racines imaginaires.

PROPOSITION VI.

Théorème.

Supposons que les deux suites

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} u_0, & \Delta u_{-1}, & \Delta^2 u_{-2}, \ldots, & \Delta^m u_{-m}, \\ u_0, & \Delta u_0, & \Delta^2 u_0, \ldots, & \Delta^m u_0, \end{array} \right.$$

présentent les mêmes signes ou même seulement le même nombre de variations; je dis que ce nombre de variations est le même que celui de la suite

$$(a) \qquad F(x_0),\ F'(x_0), \ldots,\ F^{(m)}(x_0).$$

Soient p le nombre des variations, q le nombre des permanences de chaque suite (α). Soient p' le nombre des variations, q' le nombre des permanences de la suite (a). (Proposition I), p n'est pas plus petit que p'; (proposition III), q n'est pas plus petit que q'; donc, puisque

$$p + q = p' + q',$$

on a

$$p = p' \quad \text{et} \quad q = q'.$$

Corollaire. — En se rappelant la proposition V, on voit que si h est suffisamment petit pour que les deux suites

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} u_0, & \Delta u_{-1}, & \Delta^2 u_{-2}, \ldots, & \Delta^m u_{-m}, \\ u_0, & \Delta u_0, & \Delta^2 u_0, \ldots, & \Delta^m u_0, \end{array} \right.$$

présentent le même nombre de variations, et qu'il en soit de même pour les deux suites

$$(\beta) \quad \left\{ \begin{array}{llll} u_n, & \Delta u_{n-1}, & \Delta^2 u_{n-2}, \ldots, & \Delta^m u_{n-m}, \\ u_n, & \Delta u_n, & \Delta^2 u_n, \ldots, & \Delta^m u_n, \end{array} \right.$$

la différence entre le nombre des variations des suites (α) et des suites (β) n'est pas plus petite que le nombre des racines de $F(x) = 0$ comprises entre x_0 et x_n. Si la différence entre le nombre des variations des suites (α) et des suites (β) est plus grande que le nombre des racines comprises entre x_0 et x_n, la différence de ces deux nombres est un nombre pair.

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICIEL.

III.

Simplification de l'équation générale du second degré par la transformation des coordonnées.

La réduction de l'équation générale du second degré à trois variables, telle qu'elle est ordinairement exposée, dépend de la théorie des *plans principaux*. Pour parvenir à cette réduction, on a fait un raisonnement qui contient à la fois les deux assertions suivantes : « Dans toute surface du second degré il y a au moins un système de cordes *principales*; — le plan qui divise ces cordes en parties égales peut être *à une distance infinie*. » Nous n'avons aucune objection à faire contre une manière de parler dont le sens est connu de ceux qui s'en servent, nous dirons seulement que la forme qu'on a donnée au

raisonnement dont il s'agit met, assez mal à propos, en doute l'existence d'un plan principal, puisqu'en réalité ce plan existe et que c'est précisément en le prenant pour plan de coordonnées qu'on arrive par le moyen le plus simple et le plus direct aux simplifications proposées.

Il nous a donc semblé utile d'établir à priori cette proposition fondamentale :

Dans toute surface du second degré il y a au moins un plan diamétral perpendiculaire aux cordes qu'il divise en parties égales.

Nous prévenons que par cette dénomination de *corde*, nous entendons une droite *limitée*, dont les deux extrémités se trouvent sur la surface que l'on considère. Il est clair qu'un plan qui divise en parties égales un système de cordes ne peut jamais être *à une distance infinie*.

De plus, il sera supposé que l'équation générale

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' xz \\ \quad + 2 B'' xy + 2 C x + 2 C' y + 2 C'' z + F = 0 \end{array} \right.$$

représente une surface réelle et du second degré; ainsi les coefficients A, A', A'', B, B', B'' ne seront pas nuls à la fois.

1. Pour que la surface représentée par l'équation (1) admette des cordes parallèles à une direction définie par les équations

$$x = mz, \quad y = nz,$$

il suffit que la substitution de mz et nz à x et y dans les termes du second degré de l'équation (1) donne à z^2 un coefficient autre que zéro. Car si le coefficient de z^2 n'est pas nul, les équations du second degré qui déterminent les points d'intersection de la surface et des droites parallèles à la direction $[x = mz, y = nz]$ n'auront aucune racine infinie. Et par conséquent, en menant par les dif-

férents points de la surface des parallèles à

$$[x = mz,\ y = nz],$$

ces droites rencontreront chacune la surface en un second point (*) ; donc, elles détermineront un système de cordes.

On voit de même que si le coefficient de z^2 était nul, la surface n'admettrait pas de cordes parallèles à la direction définie par les valeurs de m et de n.

La substitution de mz, nz à x, y dans l'équation (1) donne à z^2 le coefficient

$$\mathrm{A}m^2 + \mathrm{A}'n^2 + \mathrm{A}'' + 2\mathrm{B}n + 2\mathrm{B}'m + 2\mathrm{B}''mn$$

ou

$$(\mathrm{A}m + \mathrm{B}''n + \mathrm{B}')m + (\mathrm{B}''m + \mathrm{A}'n + \mathrm{B})n + (\mathrm{B}'m + \mathrm{B}n + \mathrm{A}'');$$

ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour que la surface admette des cordes parallèles à la droite $[x = mz,$ $y = nz]$ consiste dans l'inégalité

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{A}m + \mathrm{B}''n + \mathrm{B}')m + (\mathrm{B}''m + \mathrm{A}'n + \mathrm{B})n \\ \qquad + (\mathrm{B}'m + \mathrm{B}n + \mathrm{A}'') \gtrless 0. \end{array} \right.$$

Quand cette inégalité a lieu, le plan diamétral qui est représenté par l'équation

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{A}m + \mathrm{B}''n + \mathrm{B}')x + (\mathrm{B}''m + \mathrm{A}'n + \mathrm{B})y \\ + (\mathrm{B}'m + \mathrm{B}n + \mathrm{A}'')z + \mathrm{C}m + \mathrm{C}'n + \mathrm{C}'' = 0, \end{array} \right.$$

ne peut être *à une distance infinie*; cela résulte évidemment de ce que les milieux des cordes sont à des distances finies, et d'ailleurs l'inégalité (2) montre qu'on n'a pas à

(*) Il y a toutefois exception pour les points où les droites considérées seraient tangentes à la surface.

la fois

$$Am + B''n + B' = 0,$$

$$B''m + A'n + B = 0,$$

$$B'm + Bn + A'' = 0.$$

2. Occupons-nous maintenant des plans principaux.

Quand les coordonnées sont rectangulaires, pour que le plan diamétral (3) soit perpendiculaire aux cordes qu'il divise en parties égales, il faut qu'on ait

$$(Am + B''n + B') = (B'm + Bn + A'')m$$

et

$$(B''m + A'n + B) = (B'm + Bn + A'')n;$$

ou, en posant $B'm + Bn + A'' = s$, il faut qu'on ait :

$$Am + B''n + B' = sm$$

et

$$B''m + A'n + B = sn.$$

Ces dernières équations reviennent à

$$(s - A)m - B''n - B' = 0,$$
$$(s - A')n - B''m - B = 0$$

et donnent

$$(4) \qquad m = \frac{B'(s - A') + BB''}{(s - A)(s - A') - B''^2},$$

$$(5) \qquad n = \frac{B(s - A) + B'B''}{(s - A)(s - A') - B''^2}.$$

En remplaçant m et n par les expressions précédentes dans l'équation

$$B'm + Bn + A'' = s,$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$(s - A'') - Bn - B'm = 0,$$

il vient

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l}(s-A'')[(s-A)(s-A')-B''^2]\\ -[B^2(s-A)+B'^2(s-A')+2BB'B'']=0.\end{array}\right.$$

Puis, en effectuant les multiplications indiquées et ordonnant, on a l'équation

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l}s^3-[A+A'+A'']s^2\\ +[AA'+AA''+A'A''-B^2-B'^2-B''^2]s-D=0,\end{array}\right.$$

dans laquelle D représente le polynôme

$$AA'A''+2BB'B''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2.$$

A chaque racine de l'équation (7), réelle et différente de zéro, correspond au moins un système de cordes principales, et, par conséquent, au moins un plan principal.

En effet, si la racine s est réelle, les valeurs de m et n, (4) et (5), ne peuvent être imaginaires; donc la droite

$$[x=mz,\quad y=nz]$$

existe. De plus, la surface admet nécessairement des cordes parallèles à cette droite, si s n'est pas nulle, car en vertu des relations

$$B'm+Bn+A''=s,$$

$$Am+B''n+B'=sm,$$

$$B''n+A'n+B=sn,$$

l'inégalité (2) (page 432) devient

$$(m^2+n^2+1)s\gtrless 0:$$

et il est évident que cette inégalité a lieu lorsque s est différente de zéro.

Quant à l'équation du plan principal correspondant, on l'aura sous sa forme la plus simple en remplaçant dans

l'équation (3) les trinômes

$$B'm + Bn + A'',$$
$$Am + B''n + B',$$
$$B''m + A'n + B$$

par s, sm, sn. Cette substitution donne

(8) $$(mx + ny + z)s + Cm + C'n + C'' = 0$$

S'il paraît utile de faire entrer dans l'équation de ce plan les cosinus α, β, γ des angles que la direction des cordes $[x = mz, y = nz]$ forme avec les axes des x, y, z on substituera à m, n les rapports $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$; et l'équation précédente deviendra

(9) $$(\alpha x + \beta y + \gamma z)s + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0.$$

Les valeurs de α, β, γ satisfaisant aux conditions

$$\frac{\alpha}{\gamma} = m, \quad \frac{\beta}{\gamma} = n, , \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

sont nécessairement réelles et ne peuvent être nulles toutes trois. Donc si la racine s est différente de zéro, l'équation (9) représentera un plan qui n'est pas *à une distance infinie*.

D'après cela, pour démontrer que la surface a au moins un plan principal, il suffit de faire voir que l'une des trois valeurs de s est réelle et différente de zéro. Or, l'existence de cette valeur résulte des deux propositions suivantes :

1°. L'équation (7) a ses trois racines réelles;

2°. Ces trois racines ne peuvent être nulles à la fois (*).

On a donné de la première de ces propositions plu-

(*) En admettant toujours que l'équation de la surface soit du second degré, c'est-à-dire que les six coefficients A, A', A'', B, B', B'' ne soient pas nuls.

sieurs démonstrations différentes; celle que nous allons exposer est due à M. *Cauchy*.

Nous admettrons d'abord que les trois coefficients B, B′, B″ ont des valeurs différentes de zéro.

Reprenons l'équation en s sous la forme

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &(s-A'')[(s-A)(s-A')-B''^2] \\ &-[B^2(s-A)+B'^2(s-A')+2BB'B'']=0, \end{aligned}\right.$$

et nommons a, b les racines réelles et inégales de l'équation du second degré

$$(s-A)(s-A')-B''^2=0\ (*).$$

Il est facile de reconnaître que le premier membre de l'équation (6) prend le signe *plus* ou le signe *moins*, suivant qu'on substitue à l'inconnue s la plus petite ou la plus grande des racines a et b.

En effet, chacune de ces deux substitutions réduit le premier membre de (6) à

$$-[B^2(s-A)+B'^2(s-A')+2BB'B''];$$

cette expression peut s'écrire ainsi :

$$-\frac{1}{(s-A)}[B^2(s-A)^2+B'^2(s-A)(s-A')+2BB'B''(s-A)];$$

et, ayant égard à l'égalité supposée

$$(s-A)(s-A')=B''^2,$$

elle devient

$$-\frac{1}{s-A}[B^2(s-A)^2+B'^2B''^2+2BB'B''(s-A)]$$

(*) Ces racines sont $\left(\frac{A+A'}{2}\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(A-A')^2+4B''^2}$, on voit qu'elles ont des valeurs réelles qui ne peuvent être égales qu'autant que $B''=0$ et $A=A'$.

ou

$$-\frac{1}{s-A}[B(s-A)+B'B''] .$$

On voit que son signe est le même que celui de $-\frac{1}{s-A}$.

Or en supposant $a < b$, on a

$$(a-A) < 0$$

et

$$(b-A) > 0\ (*);$$

par suite

$$-\frac{1}{(a-A)} > 0$$

et

$$-\frac{1}{(b-A)} < 0.$$

Donc le résultat de la substitution du plus petit des deux nombres (a et b) a le signe *plus* et le résultat de l'autre substitution a le signe *moins*.

Si, de plus, on observe que le premier terme de l'équation (6) ordonnée étant positif, le premier membre de cette équation devient nécessairement positif pour de très-grandes valeurs de s, et négatif pour des valeurs convergentes vers $-\infty$, on en conclura que l'équation (6) admet une racine réelle plus grande que b, une seconde racine moindre que a et une troisième comprise entre a et b.

(*) Car

$$a-A=-\frac{1}{2}\left[\sqrt{(A-A')^2+4B''^2}+(A-A')\right]$$

et

$$b-A=\frac{1}{2}\left[\sqrt{(A-A')^2+4B''^2}-(A-A')\right].$$

La démonstration précédente suppose que l'expression

$$-\frac{1}{(s-A)}[B(s-A)+B'B'']^2$$

ne se réduit à zéro pour aucune des deux substitutions de a et b à s. Si l'un des deux nombres a, b, par exemple a, annulait cette expression, le nombre a serait évidemment racine de l'équation (6) ; la racine plus grande que b existerait encore : il n'en faut pas davantage pour que l'équation ait ses trois racines réelles.

Dans la réduction de l'expression

$$-[B^2(s-A)+B'^2(s-A')+2BB'B'']$$

à la forme

$$-\frac{1}{(s-A)}[B(s-A)+B'B'']^2,$$

il a été implicitement admis que les substitutions de a et b à s n'annulent pas $s-A$; ce qui exige que B'' ne soit pas nul (*). Si $B''=0$ et qu'il n'en soit pas de même des deux autres coefficients B, B', il suffira, pour que le raisonnement qu'on a fait soit encore applicable, de donner à l'équation (7) l'une ou l'autre des deux formes

$$(s-A)[(s-A')(s-A'')-B^2]$$
$$-[B'^2(s-A')+B''^2(s-A'')+2BB'B'']=0,$$
$$(s-A')[(s-A)(s-A'')-B'^2]$$
$$-[B^2(s-A)+B''^2(s-A'')+2BB'B'']=0.$$

Lorsque deux des coefficients B, B', B'' sont nuls, par

(*) Quand B'' est nul, l'équation du second degré

$$(s-A)(s-A')-B''^2=0,$$

dont les racines ont été désignées par a et b, donne

$$s=A, \quad s=A';$$

Donc l'un des deux nombres a, b, substitués à s, réduit à zéro le facteur $s-A$.

exemple B, B′, l'équation (6) devient

$$(s - A'')[(s - A)(s - A') - B''^2] = 0,$$

elle a pour racines A″, a, b.

Enfin lorsqu'on a

$$B = 0, \quad B' = 0, \quad B'' = 0,$$

l'équation proposée se réduit à

$$(s - A)(s - A')(s - A'') = 0,$$

et les valeurs de s sont A, A′, A″.

Ainsi dans tous les cas les racines de l'équation en s sont réelles.

Il reste à démontrer qu'elles ne peuvent être nulles toutes trois lorsque la surface considérée est du second degré.

Si les trois racines de l'équation

$$s^3 - (A + A' + A'')s^2$$
$$+ (AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2)s - D = 0$$

étaient nulles, on aurait les égalités

$$A + A' + A'' = 0,$$
$$AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2 = 0, \quad D = 0,$$

et comme, en retranchant du carré de la première le double de la seconde, il vient

$$A^2 + A'^2 + A''^2 + 2B^2 + 2B'^2 + B''^2 = 0,$$

il faudrait que les six coefficients A, A′, A″, B, B′, B″ fussent nuls. Par conséquent, l'équation de la surface se réduirait au premier degré; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il est donc démontré que, dans toute surface du second degré, il y a au moins un plan principal. Et on sait comment en plaçant dans ce plan deux des axes coordonnés

l'équation générale de la surface peut être réduite à sa forme la plus simple (*). G.

SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE,

PAR M. ESPRIT JOUFFRET,
Élève du Lycée Saint-Louis (classe de M. Faurie).

1. Posons

$$A = \sum a_\lambda x_\lambda, \quad B = \sum b_\lambda x_\lambda,$$

où λ doit prendre successivement les quatre valeurs 1, 2, 3, 4; A et B seront des fonctions linéaires homogènes à quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4.

Posons aussi

$$u = \sum M_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu$$

où encore λ et μ doivent prendre chacun successivement et de toutes les manières possibles les valeurs 1, 2, 3, 4 avec la condition $\lambda\mu = \mu\lambda$; u sera la fonction générale homogène du second degré des mêmes variables x.

Nous adopterons pour désigner les diverses dérivées de u (et des autres fonctions que nous aurons à considérer) la notation de M. Hesse, savoir

$$\frac{du}{dx_\lambda} = u_\lambda, \quad \frac{du_\lambda}{dx_\mu} = u_{\lambda\mu}.$$

Si nous considérons les rapports $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$ comme les

(*) M. Kummer prouve que le dernier terme de l'équation au carré des différences de l'équation aux axes principaux est la somme de sept carrés; lesquels, pris avec le signe opposé, sont sous le radical des racines de la *réduite*, lesquelles étant imaginaires, les trois racines de la proposée sont réelles (*Crelle*, t. XXVI, p. 268; 1843). TM.

coordonnées d'un point, les équations

$$A = 0, \quad B = 0$$

représenteront des plans, et l'équation

$$u = 0$$

sera l'équation générale des surfaces du second ordre. Pour abréger le discours, nous dénommerons ces plans et les surfaces par les lettres A, B, u.

2. Les deux plans A et B coupent la surface u suivant deux courbes (réelles ou imaginaires) par lesquelles nous pouvons faire passer une infinité de surfaces du second degré dont l'équation générale est

$$u + m\mathrm{AB} = v = 0.$$

On peut déterminer m de manière que la surface v soit un cône. Pour cela, il faut égaler à zéro le déterminant Δ de la fonction v. On connaît la composition de ce déterminant qui contient vingt-quatre termes dont chacun est le produit de quatre facteurs tels que

$$v_{\lambda\mu} = u_{\lambda\mu} + m(a_\mu b_\lambda + b_\mu a_\lambda) \text{ (*)} :$$

l'équation

$$\Delta = 0$$

paraît donc être du quatrième degré en m, et c'est en effet ce qui a lieu dans le cas général où l'on considère deux surfaces quelconques du second degré. Mais ici cette équation se réduit au second degré.

En effet, la fonction Δ jouit de cette propriété, que si l'on permute les deux derniers chiffres des indices entre deux facteurs de l'un de ses termes et qu'on change le signe, on obtient un autre terme de Δ. Par exemple, le terme v_{11}, v_{22}, v_{33}, v_{44} donne naissance aux trois sui-

---

(*) *Voir* Bertrand, *Algèbre*, 2e édit., p. 483. TM.

vants

$$-\nu_{11}\nu_{22}\nu_{34}\nu_{43}, \quad +\nu_{12}\nu_{21}\nu_{34}\nu_{43}, \quad -\nu_{12}\nu_{22}\nu_{33}\nu_{44}$$

et l'ensemble de ces quatre termes peut s'écrire

$$(\alpha) \qquad (\nu_{33}\nu_{44}-\nu_{34}\nu_{43})(\nu_{11}\nu_{22}-\nu_{12}\nu_{21}).$$

La fonction Δ est donc la somme de six produits tels que (α); or il est facile de reconnaître en remplaçant les ν par leurs valeurs que dans le premier de ces facteurs le terme en m^2 fourni par $\nu_{33}\,\nu_{44}$ est détruit par celui que fournit $\nu_{34}\,\nu_{42}$, et de même dans le second facteur.

La fonction Δ est donc du second degré en m, de sorte qu'il y a seulement deux cônes (proprement dits) enveloppant les deux courbes A et B (*).

(*) L'équation

$$\Delta = 0$$

étant généralement du quatrième degré, on peut dire que, dans le cas actuel, deux racines deviennent infinies. Pour ces valeurs infinies de m, la fonction ν se réduit à AB; ainsi deux des quatre cônes qui enveloppent la courbe d'intersection de deux surfaces du second degré dans le cas général se réduisent, lorsque cette courbe se compose de deux coniques, à un seul qui est le système de deux plans dans lesquels se trouvent les deux coniques et dont le sommet est indéterminé sur la droite d'intersection de ces plans.

Le théorème général est dû à M. Poncelet (*Propriétés projectives,* page 395). Plucker (*System der Geometrie des Raumes,* § 14) le démontre de la manière suivante qui permet de voir très-clairement la réduction de deux cônes à un système de plans dans le cas que nous considérons :

La détermination simultanée de deux surfaces du second degré dépend de dix-huit constantes. Ce nombre se trouvant dans les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \pi\, p^2 + \chi\, q^2 + \rho\, r^2 + \sigma\, s^2 = 0, \\ \pi' p^2 + \chi' q^2 + \rho' r^2 + \sigma' s^2 = 0, \end{cases}$$

où p, q, r, s sont des fonctions linéaires des coordonnées courantes et π, χ, etc., des constantes, il est clair que les équations représentent deux surfaces générales du second degré. Éliminant successivement l'une des quatre fonctions p, q, r, s entre ces équations, nous avons

$$(2) \qquad \begin{cases} [\pi'\chi]\, q^2 + [\pi'\rho]\, r^2 + [\pi'\sigma]\, s^2 = 0, \\ [\chi'\pi]\, p^2 + [\chi'\rho]\, r^2 + [\chi'\sigma]\, s^2 = 0, \\ [\rho'\pi]\, p^2 + [\rho'\chi]\, q^2 + [\rho'\sigma]\, s^2 = 0, \\ [\sigma'\pi]\, p^2 + [\sigma'\chi]\, q^2 + [\sigma'\rho]\, r^2 = 0, \end{cases}$$

3. Cela posé, je me propose de démontrer (analytiquement) les théorèmes suivants :

1°. Si la ligne suivant laquelle se coupent les deux plans A et B tourne dans un plan fixe, la ligne joignant les sommets de ces deux cônes tourne autour d'un point fixe.

2°. Si la première ligne est fixe, la seconde est aussi fixe.

3°. Si la première ligne tourne autour d'un point fixe, la seconde tourne dans un plan fixe.

4. Les coordonnées du sommet (ou *centre*) du cône qui correspond à la racine m' vérifient les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} v_1 &= u_1 + m'(\mathrm{A}\,b_1 + \mathrm{B}\,a_1) = 0,\\ v_2 &= u_2 + m'(\mathrm{A}\,b_2 + \mathrm{B}\,a_2) = 0,\\ v_3 &= u_3 + m'(\mathrm{A}\,b_3 + \mathrm{B}\,a_3) = 0,\\ v_4 &= u_4 + m'(\mathrm{A}\,b_4 + \mathrm{B}\,a_4) = 0,\end{aligned}\right.$$

Chacune de ces équations représente un cône qui passe par la courbe d'intersection des surfaces (1). Ces quatre cônes ont pour sommets les quatre sommets du tétraèdre formé par les plans

$$p = 0,\quad q = 0,\quad r = 0,\quad s = 0.$$

Supposons

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{\rho}{\rho'} = \lambda,$$

les équations (1) deviennent

$$\pi\, p^2 + \chi\, q^2 + \rho\,(r^2 + \lambda s^2) = 0,$$
$$\pi'\, p^2 + \chi'\, q^2 + \rho'\,(r^2 + \lambda s^2) = 0,$$

et les deux surfaces se coupent suivant deux coniques situées dans les plans représentés par l'équation

$$[\pi\rho']\, p^2 + [\chi'\rho']\, q^2 = 0.$$

Or les deux dernières équations (2) se réduisent à une seule qui est aussi

$$[\pi\rho']\, p^2 + [\chi\rho']\, q^2 = 0.$$

Ajoutons que chaque face du tétraèdre est le plan polaire du sommet opposé.

d'où nous déduisons

$$(2)\quad \frac{u_1}{A b_1 + B a_1} = \frac{u_2}{A b_2 + B a_2} = \frac{u_3}{A b_3 + B a_3} = \frac{u_4}{A b_4 + B a_4},$$

équations qui étant indépendantes de m' sont vérifiées par tous les sommets. Ce sont les équations que nous emploierons pour démontrer nos théorèmes

5. Pour démontrer le premier théorème, nous avons besoin des équations de la droite qui joint les sommets des deux cônes. Ces équations sont faciles à obtenir. En effet, les relations (2) donnent

$$\frac{u_1 a_2 - u_2 a_1}{A(b_1 a_2 - b_2 a_1)} = \frac{u_2 a_3 - u_3 a_2}{A(b_2 a_3 - b_3 a_2)} = \frac{u_3 a_4 - u_4 a_3}{A(b_3 a_4 - b_4 a_3)}.$$

En supprimant le facteur $\frac{1}{A}$, nous avons un système linéaire qui doit être vérifié par chacun des deux sommets et qui représente par conséquent la droite joignant ces deux sommets. Les équations à cette droite peuvent s'écrire d'une manière plus courte

$$(3)\qquad \frac{[u_1 a_2]}{[b_1 a_2]} = \frac{[u_2 a_3]}{[b_2 a_3]} = \frac{[u_3 a_4]}{[b_3 a_4]}$$

en désignant comme d'ordinaire les binômes alternés par des crochets.

Cela posé, soit

$$P = \sum p_\lambda x_\lambda = 0$$

un plan fixe, et posons

$$B = P + nA$$

c'est-à-dire

$$b_\lambda = p_\lambda + n a_\lambda\,;$$

ceci exprimera que les deux plans A et B se coupent sur

le plan fixe P. Substituant dans la première des fractions (3), nous avons

$$\frac{u_1 a_2 - u_2 a_1}{(p_1 + na_1) a_2 - (p_2 + na_2) a_1} = \frac{u_1 a_2 - u_2 a_1}{p_1 a_2 - p_2 a_1},$$

et comme chacune des fractions (3) se déduit de la précédente en augmentant les indices d'une unité, le système (3) deviendra

$$\frac{u_1 a_2 - u_2 a_1}{p_1 a_2 - p_2 a_1} = \frac{u_2 a_3 - u_3 a_2}{p_2 a_3 - p_3 a_2} = \frac{u_3 a_4 - u_4 a_3}{p_3 a_4 - p_4 a_3};$$

or il est évident que si nous posons

(4) $$\frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2} = \frac{u_3}{p_3} = \frac{u_4}{p_4},$$

équations qui déterminent un point fixe, ce système sera identiquement vérifié indépendamment des a. La droite (3) tournera donc autour de ce point fixe quand la droite AB tournera dans le plan P.

6. Soient

$$P = \sum p_\lambda x_\lambda = 0,$$

$$Q = \sum q_\lambda x_\lambda = 0$$

les équations d'une droite fixe. Posons

$$A = P + nQ,$$
$$B = P + n'Q$$

c'est-à-dire

$$a_\lambda = p_\lambda + nq_\lambda,$$
$$b_\lambda = p_\lambda + n'q_\lambda;$$

ce qui exprimera que les deux plans A et B passent par cette droite, et substituons dans les équations (2) (qui

sont maintenant préférables aux équations (3) en ce qu'elles ne contiennent pas les variables a et b à la fois au numérateur et au dénominateur); ces équations deviennent

$$\begin{aligned}\frac{u_1}{(A+B)p_1+(An'+Bn)q_1} &= \frac{u_2}{(A+B)p_2+(An'+Bn)q_2}\\ &= \frac{u_3}{(A+B)p_3+(An'+Bn)q_3}\\ &= \frac{u_4}{(A+B)p_4+(An'+Bn)q_4}\\ &= \frac{u_1 q_2-u_2 q_1}{(A+B)(p_1 q_2-p_2 q_1)}\\ &= \frac{u_2 q_3-u_3 q_2}{(A+B)(p_2 q_3-p_3 q_2)}\\ &= \frac{u_3 q_4-u_4 q_3}{(A+B)(p_3 q_4-p_4 q_3)}.\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\frac{[u_1 q_2]}{[p_1 q_2]}=\frac{[u_2 q_3]}{[p_2 q_3]}=\frac{[u_3 q_4]}{[p_3 q_4]},$$

équations qui représentent une droite fixe.

Cette droite se nomme la polaire réciproque de la droite PQ.

7. Soient

$$P=\sum p_\lambda x_\lambda=0,$$

$$Q=\sum q_\lambda x_\lambda=0,$$

$$R=\sum r_\lambda x_\lambda=0$$

les équations d'un point fixe. Posons

$$A=P+mQ+nR,$$
$$B=P+m'Q+n'R,$$

d'où

$$a_\lambda = p_\lambda + mq_\lambda + nr_\lambda,$$
$$b_\lambda = p_\lambda + m'q_\lambda + n'r_\lambda$$

pour exprimer que les plans A et B passent par ce point. Les équations (2) deviennent, en posant, pour abréger l'écriture,

$$\mathrm{A}\,m' + \mathrm{B}\,m = \mathrm{M},$$
$$\mathrm{A}\,n' + \mathrm{B}\,n = \mathrm{N},$$

$$\frac{u_1}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})p_1 + \mathrm{M}q_1 + \mathrm{N}r_1} = \frac{u_2}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})p_2 + \mathrm{M}q_2 + \mathrm{N}r_2}$$
$$= \frac{u_3}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})p_3 + \mathrm{M}q_3 + \mathrm{N}r_3}$$
$$= \frac{u_4}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})p_4 + \mathrm{M}q_4 + \mathrm{N}r_4}$$
$$= \frac{[u_1 q_2]}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})[p_1 q_2] + \mathrm{N}[r_1 q_2]}$$
$$= \frac{[u_2 q_3]}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})[p_2 q_3] + \mathrm{N}[r_2 q_3]}$$
$$= \frac{[u_3 q_4]}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})[p_3 q_4] + \mathrm{N}[r_3 q_4]}$$
$$= \frac{1}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}\,\frac{[u_1 q_2][r_2 q_3] - [u_2 q_3][r_1 q_2]}{[p_1 q_2][r_2 q_3] - [p_2 q_3][r_1 q_2]}$$
$$= \frac{1}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}\,\frac{[u_2 q_3][r_3 q_4] - [u_3 q_4][r_2 q_3]}{[p_2 q_3][r_3 q_4] - [p_3 q_4][r_2 q_3]}.$$

Prenant les deux dernières fractions, nous avons

$$\frac{[u_1 q_2][r_2 q_3] - [u_2 q_3][r_1 q_2]}{[p_1 q_2][r_2 q_3] - [p_2 q_3][r_1 q_2]} = \frac{[u_2 q_3][r_3 q_4] - [u_3 q_4][r_2 q_3]}{[p_2 q_3][r_3 q_4] - [p_3 q_4][r_2 q_3]}$$

ou

$$\frac{\big[[u_1 q_2],\,[r_2 q_3]\big]}{\big[[p_1 q_2],\,[r_2 q_3]\big]} = \frac{\big[[u_2 q_3],\,[r_2 q_4]\big]}{\big[[p_2 q_3],\,[r_2 q_4]\big]},$$

équation qui représente un plan fixe.

Ce plan se nomme le plan polaire du point P, Q, R.

8. Si nous supposons que les deux plans A et A′ coïncident, le cône enveloppant les deux courbes A et A′ devient circonscrit à la surface et les deux derniers théorèmes donnent les suivants :

Si par une droite on mène différents plans et par les courbes d'intersection de ces plans avec la surface des cônes tangents à celle-ci, le lieu de ces cônes est une droite.

Si par un point fixe on mène différents plans et par les courbes d'intersection de ces plans avec la surface des cônes tangents à celle-ci, le lieu des sommets de ces cônes est un plan.

Ce sont les théorèmes connus sur les plans polaires, les seuls qu'on démontre ordinairement. *Voir* un article de M. Lenthéric (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome VII) où ils sont déduits de leurs réciproques.

Remarque. Le mode de démonstration que nous avons employé pour démontrer les théorèmes énoncés au nº 3 peut être employé identiquement de la même manière pour démontrer les propriétés correspondantes des polaires planes : car le système *plan* de deux droites correspond au cône de l'espace.

AVIS.

Des élèves nous ont adressé de bonnes solutions de questions proposées dans ce journal ; elles paraîtront en décembre et janvier prochain.

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICIEL.

IV.

Recherche des racines entières d'une équation à coefficients entiers.

Quand l'équation proposée est d'un degré assez élevé et que son dernier terme admet un grand nombre de diviseurs, les épreuves auxquelles on soumet ces diviseurs dans la recherche des racines entières peuvent conduire à faire de longs calculs pour arriver, le plus ordinairement, à cette conclusion : que l'équation n'a pas de racine entière; car, l'existence d'une racine entière, dans une équation prise au hasard est un fait exceptionnel. Que si, d'une part, la régle générale est que les racines cherchées n'existent pas, et que, d'autre part, tous les calculs que l'on fait pour les trouver ne servent absolument à rien dans la détermination des valeurs approchées des racines incommensurables qui existent, on en peut certainement conclure que la méthode suivie est défectueuse (*). Pour suppléer en partie à ce qui lui manque, il conviendrait, du moins, de la faire précéder de l'indication des principaux caractères auxquels on peut reconnaître qu'une équation n'admet pour racine aucun nombre entier. On trouve sur ce sujet de très-utiles renseignements dans les *Recherches arithmétiques* de Gauss; la première section contient une proposition générale qui, dans un grand

(*) La régle que l'on donne en arithmétique pour extraire la racine carrée d'un nombre n'a pas le même défaut, puisqu'elle fait connaître une valeur approchée de la racine cherchée, lorsque cette racine ne peut être obtenue exactement.

nombre de cas, donne des moyens très-simples de reconnaître que l'équation proposée n'admet aucune racine entière.

Nous allons d'abord établir cette proposition en n'employant que des termes usités dans l'enseignement élémentaire, et nous montrerons, par des exemples, de quelle utilité elle peut être.

1. *Soient* f(x) *ou* $Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Px + Q$ *un polynôme à coefficients entiers, et* a, b *deux nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs, dont la différence* (b — a) *est exactement divisible par un certain nombre entier* n : *si l'on remplace successivement* x *par* a *et* b *dans* f(x), *la différence* f(b) — f(a) *des résultats de ces deux substitutions sera elle-même divisible par* n (*).

En effet, les égalités

$$f(b) = Ab^m + Bb^{m-1} + \ldots + Pb + Q,$$
$$f(a) = Aa^m + Ba^{m-1} + \ldots + Pa + Q,$$

donnent

$$f(b) - f(a) = A(b^m - a^m) + B(b^{m-1} - a^{m-1}) + \ldots + P(b - a).$$

Mais on sait que les différences $b^m - a^m$, $b^{m-1} - a^{m-1}$, etc., sont exactement divisibles par $b - a$; donc

$$f(b) - f(a)$$

est multiple de $b - a$, et, par conséquent, multiple de n.

2. *Si, dans un polynôme* f(x) *à coefficients entiers, on remplace successivement la variable* x *par deux*

(*) Voici l'énoncé de Gauss : *Soit* X *une fonction de l'indéterminée* x *de cette forme* $Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$, A, B, C, *etc., étant des nombres entiers quelconques,* a, b, c *des nombres entiers et positifs. Si l'on donne à* x *des valeurs* congrues, *suivant un certain module, les valeurs résultantes pour* X *le seront aussi.* (Section I, n° 9.)

nombres entiers quelconques a, b, *positifs ou négatifs, et qu'on divise les résultats* f(a), f(b) *de ces substitutions par la différence* b — a *des nombres substitués, les restes des deux divisions seront égaux entre eux.*

Car, soient r et r' ces restes et q et q' les quotients correspondants, on aura

$$f(a) = (b-a)\,q + r,$$
$$f(b) = (b-a)\,q' + r',$$

d'où

$$f(b) - f(a) = (b-a)(q'-q) + r' - r.$$

Or, chacun des deux restes r, r' étant moindre que le diviseur correspondant $(b-a)$, la différence $r'-r$ de ces restes est nécessairement plus petite que $(b-a)$; d'ailleurs (nº 1), $f(b)-f(a)$ est divisible exactement par $(b-a)$, donc

$$r' - r = 0,$$

d'où

$$r' = r.$$

On démontrerait de même que les restes des divisions de $f(a)$, $f(b)$ par un sous-multiple quelconque n de $b-a$ sont égaux entre eux.

3. *Si l'on remplace successivement* x *dans le polynôme* f(x) *à coefficients entiers par les nombres entiers consécutifs* a, a + 1, a + 2, *etc., positifs ou négatifs, et qu'on divise par un certain nombre entier* n *les résultats* f(a), f(a + 1), f(a + 2), *etc., de ces substitutions, les restes des* n *premières divisions se reproduiront indéfiniment dans le même ordre.*

En effet, nommons b le $(n+1)^{ième}$ terme de la suite indéfinie a, $a+1$, $a+2$, etc., il en résultera

$$b - a = n.$$

Donc (nº 2) les restes des divisions de $f(b)$ et $f(a)$ par

n seront égaux. De même, les restes des divisions de $f(b+1)$ et $f(a+1)$ par n seront égaux puisque

$$(b+1)-(a+1)=b-a=n.$$

Et ainsi de suite. On voit donc que les n premiers restes se reproduiront indéfiniment dans le même ordre. Il est à observer qu'on trouverait aussi les mêmes restes, mais dans un ordre inverse, en divisant successivement par n les nombres $f(a-1)$, $f(a-2)$, $f(a-3)$, etc. Cela résulte évidemment de ce qui vient d'être démontré.

4. *Si, dans le premier membre d'une équation*

$$f(x)=0,$$

à coefficients entiers, on remplace successivement l'inconnue x *par* n *nombres entiers consécutifs* a, a + 1, a + 2,..., a + (n — 1), *positifs ou négatifs, et que les résultats de ces substitutions ne soient, aucun, divisibles par* n, *l'équation proposée n'admettra aucune racine entière* (*).

Car si α représente un nombre entier quelconque, positif ou négatif, le reste de la division de $f(\alpha)$ par n sera égal à l'un des restes des divisions par n des n nombres

$$f(a),\ f(a+1),\ f(a+2),\ldots,\ f(a+n-1)\ (\text{n}^\circ\ 3);$$

or, d'après l'hypothèse, aucun de ces restes n'est nul, donc $f(\alpha)$ est égal à un multiple quelconque de n, augmenté d'un nombre plus petit que n et autre que zéro, par con-

(*) « On voit en général que lorsque X est de la forme

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots,$$

A, B, C, etc., étant entiers et n entier et positif, l'équation

$$X = 0$$

n'aura aucune racine rationnelle, s'il arrive que pour un certain module la congruence $X \equiv 0$ ne soit pas satisfaite. » (*Recherches arithmétiques*, section I, n° 11.)

séquent $f(\alpha)$ ne peut être nul. Ainsi l'équation proposée n'admettra pour racine aucun nombre entier.

De là, les remarques suivantes :

1°. *Quand le terme indépendant de l'inconnue d'une équation*

$$f(x) = 0,$$

à coefficients entiers, est un nombre impair et que la somme des coefficients des termes qui contiennent l'inconnue est un nombre pair, l'équation ne peut admettre pour racine aucun nombre entier.

Car les substitutions de 0, 1 à x donnent pour résultats deux nombres $f(0)$, $f(1)$ qui, par hypothèse, ne sont, aucun, divisibles par le nombre, 2, des substitutions; donc (n° 4) l'équation n'admet aucune racine entière.

Comme exemple, considérons l'équation

$$x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 12x - 75 = 0,$$

dont le dernier terme -75 est impair. La somme des coefficients des termes dépendants de x est le nombre pair -16; donc l'équation n'aura aucune racine entière.

On sait d'ailleurs qu'elle ne peut admettre de racines fractionnaires puisque le coefficient de son premier terme est l'unité; par conséquent, ses racines réelles sont incommensurables.

2°. *Si les résultats des substitutions de* $-1, 0, +1$ *à l'inconnue* x dans le premier membre *d'une équation*

$$f(x) = 0,$$

à coefficients entiers, ne sont, aucun, multiples de 3, *l'équation n'admettra aucune racine entière.*

C'est ce qui résulte de la proposition démontrée n° 4, en supposant $a = -1$ et $n = 3$.

Prenons pour exemple l'équation

$$2x^5 - 8x^4 + 7x^3 - 3x - 80 = 0.$$

En remplaçant successivement x par $-1, 0, +1$, il

vient :

$$f(-1) = -94, \quad f(0) = -80, \quad f(1) = -82.$$

Aucun des nombres 94, 80, 82 n'est multiple de 3, donc l'équation proposée n'a pas de racine entière.

3°. *Lorsque la somme des coefficients de tous les termes d'une équation*

$$f(x) = 0,$$

à coefficients entiers, est un nombre impair, l'équation ne peut admettre pour racine aucun nombre impair.

En effet, le reste de la division de $f(1)$ par 2 est égal à l'unité, puisque, d'après l'hypothèse, la somme des coefficients de tous les termes de l'équation est un nombre impair. Il en résulte (n° 3) que si l'on divise par 2 les nombres $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$, etc., $f(-1)$, $f(-3)$, $f(-5)$, etc., les restes des divisions seront constamment égaux à l'unité. De sorte que si l'on remplace x par un nombre impair quelconque, dans $f(x)$, le résultat de la substitution sera lui-même un nombre impair. Donc l'équation n'admettra pour racine aucun nombre impair.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^4 - 40x^3 + 32x^2 - 18x - 90 = 0,$$

dans laquelle la somme des coefficients est le nombre impair -115. Les diviseurs impairs 3, 5, 9, 15, 45 du dernier terme ne peuvent être racines de l'équation.

G.

Note. Cette élucidation de Gauss renferme la solution de la question 345 (p. 383). En 1812, M. Piobert, alors élève au lycée Napoléon, classe de M. Dinet, a énoncé ce théorème : Lorsque la somme des coefficients est impaire, la racine ne peut être paire. Prochainement plusieurs démonstrations directes.

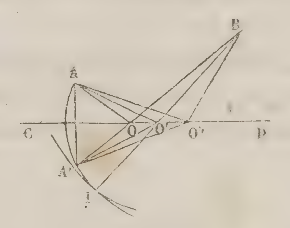
TM.

CONVEXITÉ DE L'ELLIPSE ET DE LA PARABOLE DÉFINIES PAR LA PROPRIÉTÉ FOCALE DE LA TANGENTE;

PAR M. A. VACHETTE.

1. Un polygone plan est convexe s'il est tout entier à droite ou à gauche de la direction prolongée d'un quelconque de ses côtés : il en résulte que son périmètre ne peut être rencontré par une droite en plus de deux points, propriété caractéristique de la convexité. Une courbe plane, limite des polygones infinitésimaux qu'on peut lui inscrire, est convexe dans les mêmes conditions.

2. Le plus court chemin brisé de A en B, dont le sommet soit sur CD, a pour sommet le point O obtenu en



joignant à B le point A', symétrique de A par rapport à CD; tout autre chemin AO'B est plus long, car AO' + O'B ou A'O' + O'B est plus long que AO + OB ou A'OB.

De part et d'autre du point O, il ne peut y avoir que deux chemins brisés égaux; du même côté que O', AO'' + O''B ou A'O'' + O''B est plus grand ou plus petit que AO' + O'B ou A'O' + O'B; de l'autre côté du point O, il ne pourra exister qu'un seul chemin brisé égal à AO'B. Si la somme AO' + O'B = $2a$ est donnée et plus grande que AOB, le point O' est le centre d'une circonférence passant par les deux points A et A' et tan-

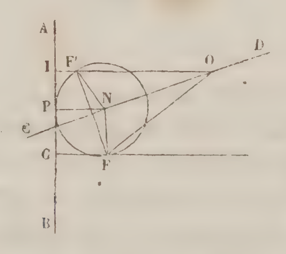
gente à la circonférence BI décrite du point B comme centre avec le rayon $2a$. Le problème est possible et donne deux solutions : il est résolu au IIIe livre de la *Géométrie* de M. Blanchet.

Au point O, les droites AO et BO font des angles égaux avec CD.

3. Supposons que A et B soient les deux foyers d'une ellipse dont le grand axe est $2a$; si le chemin minimum AOB est plus petit que $2a$, CD est une sécante qui ne coupe l'ellipse qu'en deux points; s'il est égal à $2a$, CD est une tangente n'ayant que le point O commun avec l'ellipse, et on voit que la tangente fait au point de contact des angles égaux avec les rayons vecteurs; s'il est plus grand que $2a$, CD est extérieure à l'ellipse.

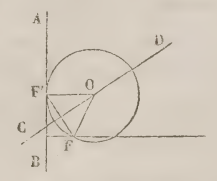
Tout ce qui précède s'applique, sans aucun changement, au cas où la droite CD rencontre en O la droite des foyers A et B.

4. Supposons une parabole qui ait pour foyer le point F et pour directrice la droite AB, et examinons les relations de position d'une droite CD et de la courbe. Si le

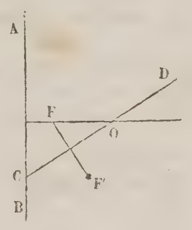


point F′, symétrique de F par rapport à CD, est du même côté de AB que le point F, en menant F′O parallèle à l'axe FG, on détermine sur CD l'intersection O, point plus rapproché du foyer que de la directrice, car on a OF ou $OF' < OI$. On peut alors trouver sur CD deux points seulement qui soient à égale distance

du foyer et de la directrice; l'un de ces points, N, est le centre d'une circonférence passant par les deux points F et F′ et tangente à la droite AB. Le problème est possible et donne deux solutions; il est aussi résolu au IIIe livre de l'ouvrage de M. Blanchet. La droite CD est une sécante qui ne coupe la parabole qu'en deux points. Si le point F′ est sur AB, le point O est lui-même le centre de la circonférence; il n'y a qu'une solution; CD est une



tangente qui fait au point de contact O des angles égaux avec le rayon vecteur et une parallèle à l'axe. Si le point F′ est de l'autre côté de AB par rapport au point F, le problème devient impossible et la droite CD est extérieure à la parabole.



Si la droite CD rencontre l'axe au delà du point F en O, le point F′ occupe la première des trois positions que nous avons examinées et CD est nécessairement sécante.

Note. Ceci revient à ce problème : Le centre, le foyer et la directrice d'une conique et une droite étant donnés, trouver l'intersection de la droite et de la conique sans la décrire. La propriété fondamentale de la directrice fournit une solution immédiate. Tm.

QUESTIONS.

351. Soient les équations

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0 \qquad (\text{racines } \alpha,\ \alpha',\ \alpha''),$$
$$x^3 - p'x^2 + q'x - r' = 0 \qquad (\text{racines } \beta,\ \beta',\ \beta''),$$

et posons

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta'' \\ 1 & \alpha'' & \beta' \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta' \\ 1 & \alpha' & \beta'' \\ 1 & \alpha'' & \beta \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta' \\ 1 & \alpha' & \beta \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix} \qquad D_5 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta'' \\ 1 & \alpha' & \beta \\ 1 & \alpha'' & \beta' \end{vmatrix} \qquad D_6 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta'' \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 27r^2 + 4q^3 - 18pqr + 4p^3r - p^2q^2,$$
$$\Delta' = 27r'^2 + 4q'^3 - 18p'q'r' + 4p'^3r' - p'^2q'^2.$$

Démontrer que l'équation suivante en t

$$t[t + (p^2 - 3q)(p'^2 - 3q')]^2$$
$$- \frac{1}{16}\left(\sqrt{\Delta}\,\frac{d\Delta'}{dr'} \pm \sqrt{\Delta'}\,\frac{d\Delta}{dr}\right)^2 = 0$$

a pour racines les quantités D_1^2, D_2^2, D_3^2, D_4^2, D_5^2, D_6^2.

(Michaël Roberts.)

352. Étant donné le volume d'un secteur sphérique, quelle est la valeur extrême de l'aire *totale* du secteur? Discussion du problème.

SOLUTION DE LA QUESTION 294

(voir t. XIII, p. 305);

PAR M. BRIOSCHI,
Professeur à l'université de Pavie.

Soient $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, n points matériels d'égales masses; G_2 le centre de gravité de P_1 et P_2; G_3 le centre de gravité de P_3 et de la masse $P_1 + P_2$ posée en G_2; G_4 le centre de gravité de P_4 et de $P_1 + P_2 + P_3$ posées en G_3, et ainsi de suite; de sorte que G_n est le centre de gravité de P_n et de P_{n-1}; G_n est indépendant de la manière dont on prend les masses; désignons par $A_{(i)}$ la distance de G_{i-1} à P_i, la quantité

$$\frac{1}{2}(A_2)^2 + \frac{2}{3}(A_3)^2 + \frac{3}{4}(A_4)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right) A_n^2$$

est constante, dans quelque ordre qu'on prenne les masses. (STEINER.)

Observation. G_1 est la même chose que P_1 : ainsi A_2 est la distance de P_1 à P_2.

Soient x_r, y_r, z_r les coordonnées rectangulaires du point P_r; α_r, β_r, γ_r celles du point G_r. On a

$$\alpha_r = \frac{1}{r}\sum_1^r {}_s\, x_s\,(^*), \quad \beta_r = \frac{1}{r}\sum_1^r {}_s\, y_s, \quad \gamma_r = \frac{1}{r}\sum_1^r {}_s\, z_s,$$

(*) $\sum_1^r {}_s$ signifie qu'il faut donner à s toutes les valeurs de la suite $1, 2, 3, \ldots, r$. TM.

et

$$A_r^2 = (\alpha_{r-1} - x_r)^2 + (\beta_{r-1} - y_r)^2 + (\gamma_{r-1} - z_r)^2.$$

En substituant les valeurs ci-dessus, on aura

$$(r-1)^2 A_r^2 = \left[\sum_{1}^{r-1}{}_s\, x_s - (r-1)\, x_r\right]^2 + \left[\sum_{1}^{r-1}{}_s\, y_s - (r-1) y_r\right]^2$$

$$+ \left[\sum_{1}^{r-1}{}_s\, z_s - (r-1)\, z_r\right]^2.$$

Mais

$$\left[\sum_{1}^{r-1}{}_s\, x_s - (r-1) x_r\right]^2$$

$$= (r-1)\sum_{1}^{r-1}{}_s (x_s - x_r)^2 - \frac{1}{2}\sum_{1}^{r-1}{}_i \sum_{1}^{r-1}{}_j (x_i - x_j)^2;$$

par conséquent, si l'on suppose

$$\left[\sum_{1}^{r-1}{}_s\, x_s - (r-1)\, x_r\right]^2 = (r-1)^2 \delta_r^2,$$

on a

$$a_2 \delta_2^2 + a_3 \delta_3^2 + \ldots + a_n \delta_n^2 = \sum_{1}^{n}{}_i\, \alpha_i \sum_{1}^{i-1}{}_j (x_i - x_j)^2$$

où

$$(1)\quad \alpha_i = \frac{1}{i-1} a_i - \frac{1}{i^2} a_{i+1} - \frac{1}{(i+1)^2} a_{i+2} - \ldots - \frac{1}{(n-1)^2} a_n.$$

On en déduit tout de suite que

$$\alpha_2 A_2^2 + a_3 A_3^2 + \ldots + a_n A_n^2 = \sum_{1}^{n}{}_i \alpha_i \sum_{1}^{i-1}{}_j \delta_{i,j}^2,$$

où $\delta_{i,j}$ est la distance entre les points P_i, P_j. Le premier membre de cette équation se réduira à une constante dans quelque ordre qu'on prenne les masses, en supposant

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n;$$

or l'équation (1) et ses analogues nous donnent

$$a_i = (i - 1)\, a_i + \frac{i-1}{i} (\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2} + \ldots + \alpha_n);$$

par conséquent, si l'on fait

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = m,$$

on a

$$a_i = \frac{i-1}{i} mn$$

et

$$\frac{1}{2} A_2^2 + \frac{2}{3} A_3^2 + \frac{3}{4} A_4^2 + \ldots + \frac{n-1}{n} A_n^2 = \frac{1}{2n} \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_j \delta_{i,j}^2.$$

Théorème. Il est impossible de trouver quatre carrés tels, que la somme de trois quelconques moins le quatrième fasse un carré. (EULER.)

Théorème. ABC, triangle sphérique; O, centre de la sphère; V_1, volume du parallélipipède qui a pour arêtes OA′, OB′, OC′; A′, B′, C′ sont les milieux des côtés du triangle. S étant l'aire du triangle, on a $V = \sin \frac{1}{2} S$.

(CORNÉLIUS KEOGH.)

DEUX THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE SUR LA DROITE ET LE CERCLE;

PAR M. BRIOSCHI,
Professeur à l'université de Pavie.

1°. Soient

$$\frac{x - a_r}{\alpha_r} = \frac{y - b_r}{\beta_r} = \frac{z - c_r}{\gamma_r}$$

les équations d'une droite l_r. Si l'on pose

$$A_r = b_r \gamma_r - c_r \beta_r,$$
$$B_r = c_r \alpha_r - a_r \gamma_r,$$
$$C_r = a_r \beta_r - b_r \alpha_r,$$

les conditions pour que quatre droites l_1, l_2, l_3, l_4 soient génératrices d'un même hyperboloïde à une nappe sont données par l'équation

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire par les équations qu'on obtient en égalant à zéro chacun des déterminants du quatrième ordre qu'on déduit de cette forme. On sait que cela conduit à trois seules équations indépendantes (*).

(*) Ces lettres prises quatre à quatre donnent quinze déterminants du quatrième ordre qui se réduisent à trois, savoir $A_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $B_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $C_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. TM.

La condition analogue dans la géométrie plane est

$$\begin{vmatrix} C_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ C_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ C_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle est vérifiée lorsque les trois droites l_1, l_2, l_3 passent par un même point.

2°. Trois cercles A, B, C étant donnés dans le même plan, soient :

$$l = 0$$

l'équation de la droite qui passe par les centres des cercles B, C;

$$m = 0$$

l'équation de la droite qui passe par les centres des cercles C, A;

$$n = 0$$

l'équation de la droite qui passe par les centres des cercles A, B; et

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0$$

les équations des polaires de l'origine par rapport à chacun des cercles A, B, C : l'équation

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0$$

représente le cercle orthotomique aux trois cercles donnés.

Observation. L'équation de ce lieu géométrique a été donnée récemment par M. Salmon (*Quarterly Journal of pure and applied mathematics*, dec. 1855) sous la

forme

$$\begin{vmatrix} \frac{dA}{dx}, & \frac{dA}{dy}, & \frac{dA}{dz} \\ \frac{dB}{dx}, & \frac{dB}{dy}, & \frac{dB}{dz} \\ \frac{dC}{dx}, & \frac{dC}{dy}, & \frac{dC}{dz} \end{vmatrix} = 0,$$

$A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ étant les équations des cercles.

On peut assez facilement passer de l'une à l'autre forme.

QUESTIONS.

353. Soit ABCD un quadrilatère coupé par une transversale en α sur le côté AB et en β sur le côté opposé CD; soient α' le conjugué harmonique de α par rapport aux points A, B, et β' le conjugué harmonique de β par rapport aux points C, D; menons la droite $\alpha'\beta'$, faisons une construction analogue sur les côtés opposés AC, BD et sur les diagonales AD, BC : les trois droites passent par le même point. (De Lafitte.)

354. Soit un point fixe O dans le plan d'un quadrilatère. On construit par rapport à ce point les polaires des sommets opposés A et D, et le point d'intersection de ces polaires; on fait la même opération par rapport aux sommets opposés B et C et par rapport aux points de concours des côtés opposés : les trois points d'intersection sont en ligne droite. (De Lafitte.)

355. Par le point fixe O on mène des rayons vecteurs aux six points milieux des côtés et des diagonales du quadrilatère; par chaque point milieu, on mène une parallèle au rayon vecteur qui va au côté opposé : les six parallèles se coupent en un même point. (De Lafitte.)

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XV.)

Analyse algébrique.

Analyse indéterminée; Arithmologie; Arithmétique.

Géométrie élémentaire.

Géométrie segmentaire.

Géométrie descriptive.

Trigonométrie plane et sphérique.

Géométrie de l'espace; Lignes et Surfaces.

Géométrie des lignes planes spéciales.

Coniques planes.

Surfaces du second degré.

Géométrie pratique.

Mécanique.

Calcul infinitésimal; séries.

Physique mathématique; Astronomie; Gnomonique.

Questions proposées.

Questions résolues.

Mélanges.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(Les noms des auteurs d'articles sont précédés d'un astérisque.)

QUESTIONS NON RÉSOLUES

Dans les quinze premiers volumes.

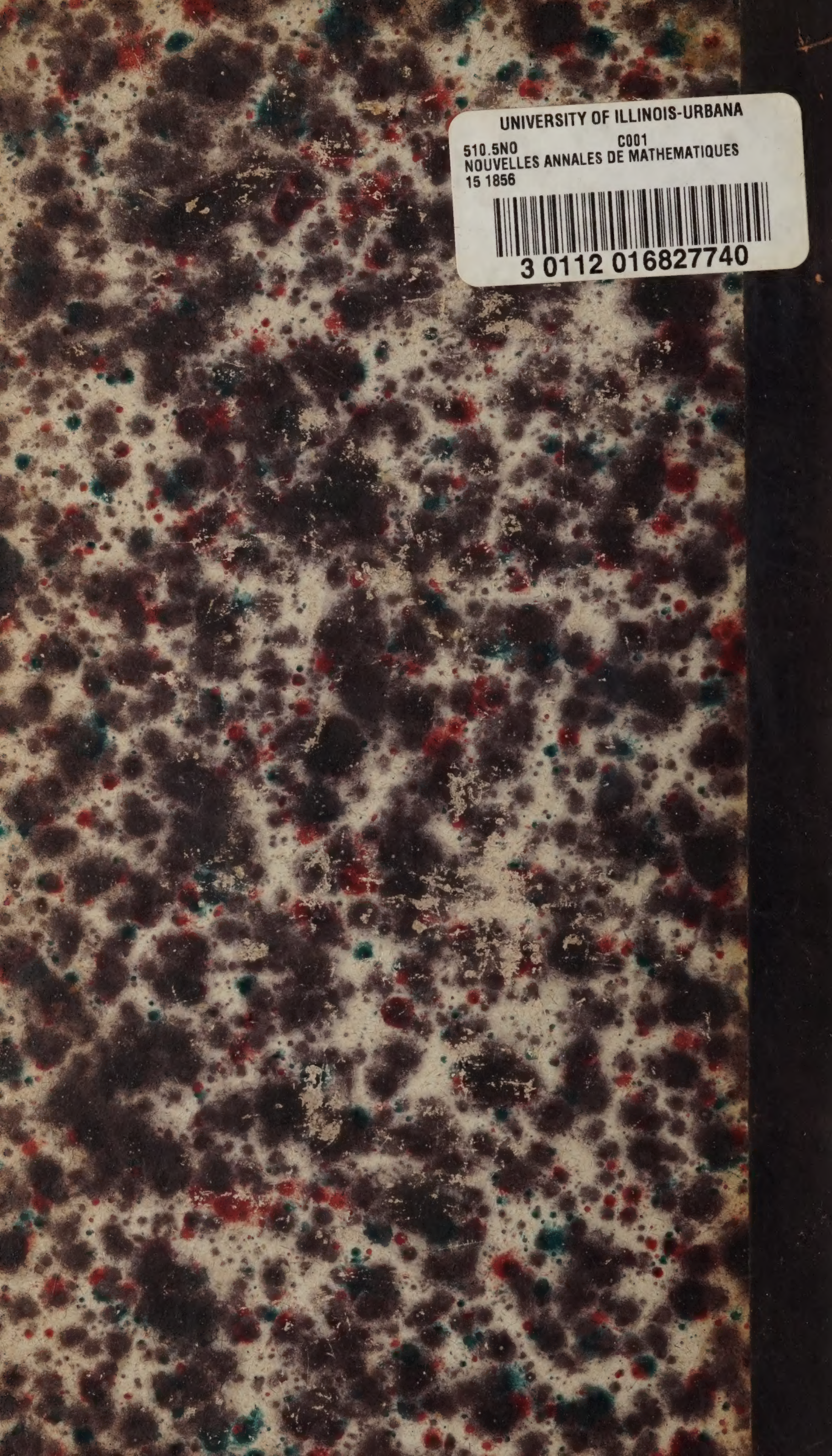
Nos.	Pages.
TOME II.	
61	48
TOME IV.	
93	259
TOME V.	
120	202
TOME VII.	
190	246
192	368
193	368
TOME VIII.	
199	44
TOME X.	
240	357
245	358
TOME XI.	
251 (échec)	115
252 (domino)	115
266	401
TOME XII.	
270	99
280	327
TOME XIII.	
289	192

Nos.	Pages.
TOME XIV.	
307	262
313	305
TOME XV.	
316	52
317	52
319	52
324	229
325	229
331	243
333	243
334	243
337	290
342	353
343	353
347	387
349	407
350	407
351	458
352	458
353	464
354	464

Observation. Sur 354 questions, il en reste 35 à résoudre. Les autres sont résolues et imprimées, ou bien en manuscrit, et paraîtront en 1857.






UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
510.5NO C001
NOUVELLES ANNALES DE MATHEMATIQUES
15 1856
3 0112 016827740